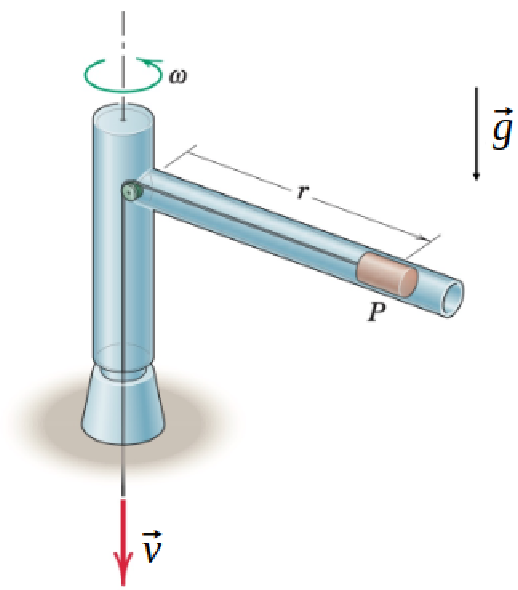
Mecánica FI2001-5
Control 1: Sábado 9 de abril, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

P1: El sistema tubular mostrado en la figura gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular de magnitud constante ω. Un pequeño cilindro P de masa m se puede mover libre de roce dentro del tubo horizontal. El cilindro está sujeto de una cuerda que pasa por una pequeña polea y sale por la parte inferior del conjunto con velocidad constante $\vec{v}$. Considere que en $t = 0$, el cilindro P se encuentra a una distancia r_0 de la polea, y que tanto la cuerda como la polea son ideales.

(a) Determine la aceleración del cilindro en función del tiempo t.

(b) Determine la fuerza de contracto del tubo sobre el cilindro y la tensión de la cuerda, ambas cosas en función del tiempo t.



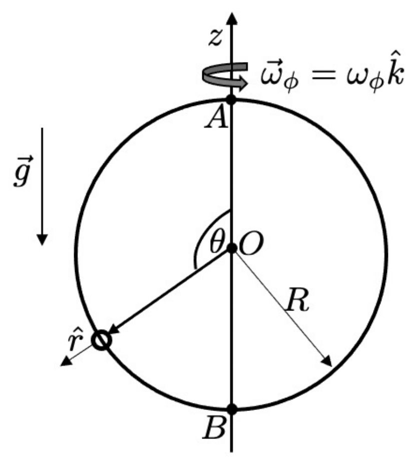
Recuerde: La aceleración en coordenadas cilíndricas es

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}.$$

P2: Un anillo de radio R gira con velocidad angular $\vec{\omega}_\phi = \omega_\phi \hat{k}$ en torno al eje vertical z de la figura, el cual pasa por su centro en el punto O y se intersecta con el anillo en los puntos A y B. La velocidad angular ω_ϕ **no** es necesariamente constante. Otro anillo mucho más pequeño, de masa m, desliza sin roce y en presencia de aceleración de gravedad $\vec{g} = -g\hat{k}$ a lo largo del anillo de radio R. La posición del anillo pequeño está determinada por el ángulo θ que se muestra en la figura.

(a) Encuentre el valor de ω_ϕ en función de θ (es decir, $\omega_\phi(\theta)$) de modo que $\dot{\theta}$ sea constante en todo instante. Determine el rango para θ en el cual esto es posible.

(b) Si se sabe que en todo instante $\dot{\theta} = \sqrt{g/R}$, y considerando la fuerza normal $\vec{N}$ que ejerce el anillo de radio R sobre el anillo pequeño, encuentre su componente radial $N_r = \hat{r} \cdot \vec{N}$ en términos de m, g y θ.



Recuerde: La aceleración en coordenadas esféricas es

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\phi}^2)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}\right)\hat{\phi}.$$

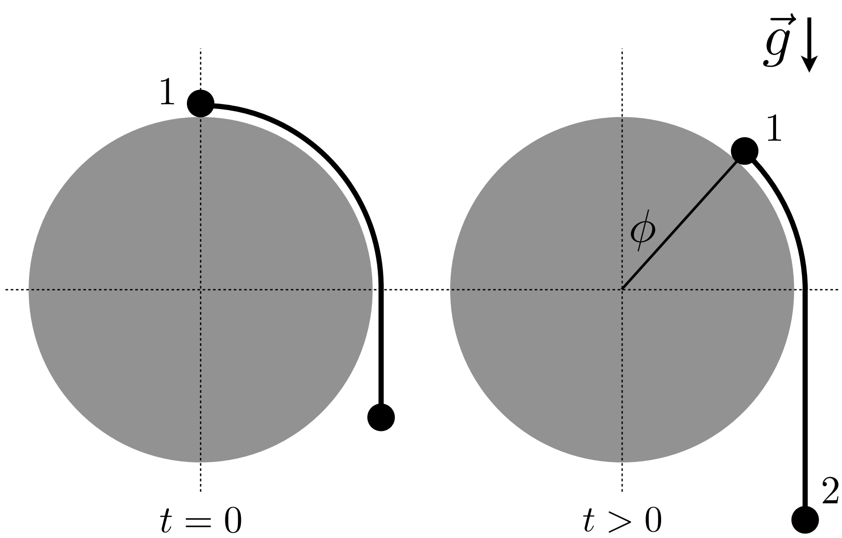
P3: Una partícula de masa m (partícula 1) puede deslizar sin roce sobre la superficie de un cilindro de radio R. Una segunda partícula de igual masa (partícula 2) permanece atada a 1 mediante una cuerda ideal de largo $L > \pi R/2$. Inicialmente ($t = 0$) las partículas están en reposo, con 1 en la parte más alta del cilindro (ver figura).

(a) Escriba expresiones para las fuerzas que actúan sobre ambas partículas.

(b) Obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ que describe la posición de la partícula 1.

(c) Integre la ecuación obtenida en la parte (b) para obtener $\dot{\phi}$ en función de ϕ. (Recuerde que $\ddot{\phi}\dot{\phi} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\dot{\phi}^2$).

(d) Obtenga una ecuación que permita determinar el ángulo en el cual la partícula 1 se despega del cilindro.



Solución P1: Se nos dice que $\dot{\rho} = -v$ donde $v = ||\vec{v}||$. Sigue que $\rho = r_0 - vt$. Luego, junto con $\ddot{z} = 0$ y $\dot{\phi} = \omega$, la aceleración es $\vec{a} = -(r_0 - vt)\omega^2\hat{\rho} - 2v\omega\hat{\phi}$. Las fuerza total sobre P es $\vec{F} = -mg\hat{k} - T\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}$. Luego, la segunda ley de newton adquiere la forma:

$$-m(r_0 - vt)\omega^2\hat{\rho} - 2mv\omega\hat{\phi} = -mg\hat{k} - T\hat{\rho} + N_\phi\hat{\phi} + N_z\hat{k}. \tag{1}$$

Igualando componentes encontramos $T = m(r_0 - vt)\omega^2$, $N_\phi = -2mv\omega$ y $N_z = mg$.

Solución P2: La aceleración en coordenadas esféricas con $\dot{\phi} = \omega_\phi$ y $r = R$ constantes es:

$$\vec{a} = -R(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\omega_\phi^2)\hat{r} + R(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\omega_\phi^2)\hat{\theta} + R(2\dot{\theta}\omega_\phi\cos\theta + \sin\theta\dot{\omega}_\phi)\hat{\phi}.$$

Las fuerza total es $\vec{F}_{\text{tot}} = N_\phi\hat{\phi} + N_r\hat{r} + mg(-\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta})$. Luego, la segunda ley de Newton por componentes adquiere la forma

$$N_r = -mR(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\omega_\phi^2) + mg\cos\theta \tag{2}$$

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\omega_\phi^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = 0. \tag{3}$$

$$N_\phi = mR(2\dot{\theta}\omega_\phi\cos\theta + \sin\theta\dot{\omega}_\phi). \tag{4}$$

Para lograr $\ddot{\theta} = 0$ se requiere $\omega_\phi^2 = -\frac{g}{R\cos\theta}$. Insertando este resultado junto con $\dot{\theta} = \sqrt{g/R}$ en la ecuación para N_r, obtenemos $N_r(\theta) = mg(\cos\theta - 1 - +\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta})$.

Solución P3: Las aceleraciones de 1 y 2 son: $\vec{a}_1 = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}$ y $\vec{a}_2 = \ddot{z}\hat{k}$. Se tiene que $(\pi/2 - \phi)R - z = L$. Luego $\vec{a}_2 = -R\ddot{\phi}\hat{k}$. Las fuerzas actuando sobre 1 y 2 son $\vec{F}_1 = N\hat{\rho} + mg(-\cos\phi\hat{\rho} + \sin\phi\hat{\phi}) + T\hat{\phi}$ y $\vec{F}_2 = -mg\hat{k} + T\hat{k}$. La 2ª de Newton para 1 y 2:

$$m(R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}) = N\hat{\rho} + mg(-\cos\phi\hat{\rho} + \sin\phi\hat{\phi}) + T\hat{\phi}, \qquad -mR\ddot{\phi}\hat{k} = -mg\hat{k} + T\hat{k}.$$

De aquí siguen 3 ecuaciones:

$$mR\ddot{\phi} = mg\sin\phi + T, \qquad -mR\dot{\phi}^2 = N - mg\cos\phi, \qquad -mR\ddot{\phi} = -mg + T.$$

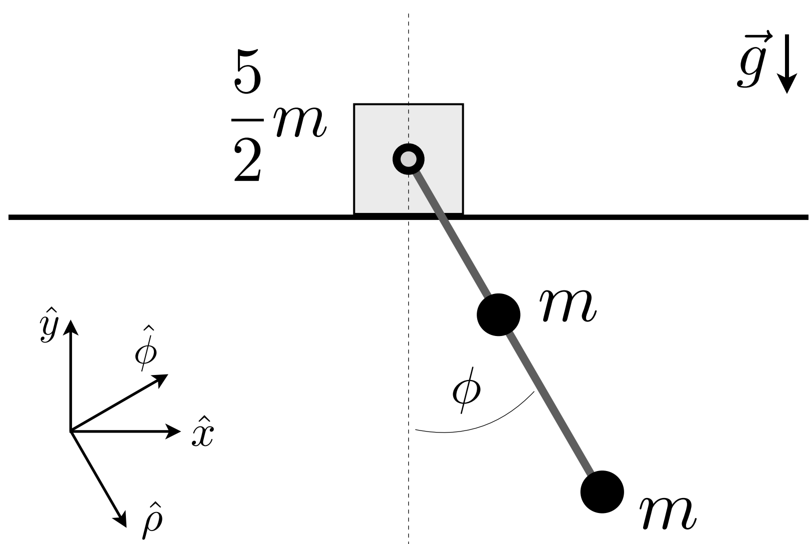
Juntando la primera con la tercera da la ecuación de movimiento buscada $\ddot{\phi} - \frac{g}{2R}(1 + \sin\phi) = 0$. Multiplicando por $\dot{\phi}$ e integrando obtenemos $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{2R}(\phi - \cos\phi)\right] = 0$. Luego sigue que $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{g}{2R}(\phi - \cos\phi) = C$ donde C es una constante de integración. Imponiendo condiciones iniciales encontramos C lo que arroja $\dot{\phi}^2 = \frac{g}{R}(1 + \phi - \cos\phi)$. Usando la ecuación para N finalmente obtenemos $N(\phi) = mg(2\cos\phi - 1 - \phi)$. Luego, la ecuación que determina el ángulo en que se despega 1 es: $2\cos\phi - 1 - \phi = 0$.

Mecánica FI2001-5
Control 2: Sábado 11 de junio, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

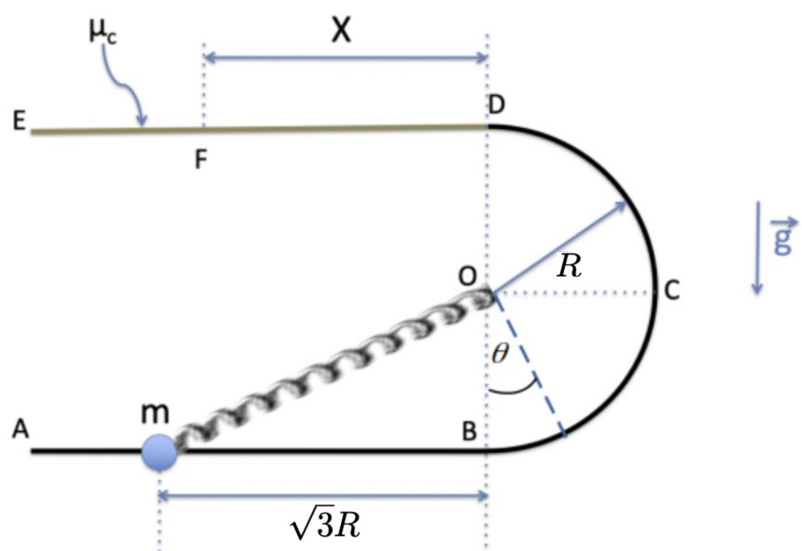
P1: Un bloque de masa $5m/2$ sostiene, a través de una rótula, un péndulo compuesto por dos masas idénticas m adosadas a una varilla sin masa de largo L. El bloque descansa sobre una superficie rugosa sin moverse, y el péndulo es tal que las masas permanecen a distancias $L/2$ y L del bloque (ver figura). El coeficiente de roce estático entre el bloque y la superficie rugosa es μ_e. En $t = 0$ el péndulo se suelta desde una posición completamente horizontal ($\phi = \pi/2$) y en reposo ($\dot{\phi} = 0$).

(a) Obtenga una expresión para el momento total del péndulo con respecto a la rótula.
(b) Obtenga una expresión para el torque total actuando sobre el péndulo con respecto a la rótula.
(c) A partir de los resultados encontrados en (a) y (b), determine la ecuación de movimiento del péndulo, y obtenga una expresión para $\dot{\phi}$ en función de ϕ.
(d) Obtenga expresiones para la aceleración del centro de masas del péndulo y la fuerza total actuando sobre el péndulo.
(e) A partir de los resultados de la parte (c) y (d), obtenga una expresión para la fuerza que el bloque ejerce sobre el péndulo en función de ϕ. Exprese su resultado en términos de la base $(\hat{x}, \hat{y})$ de la figura.
(f) Determine el valor que debe tener μ_e si se sabe que el bloque comienza a deslizar cuando $\phi = \pi/4$.



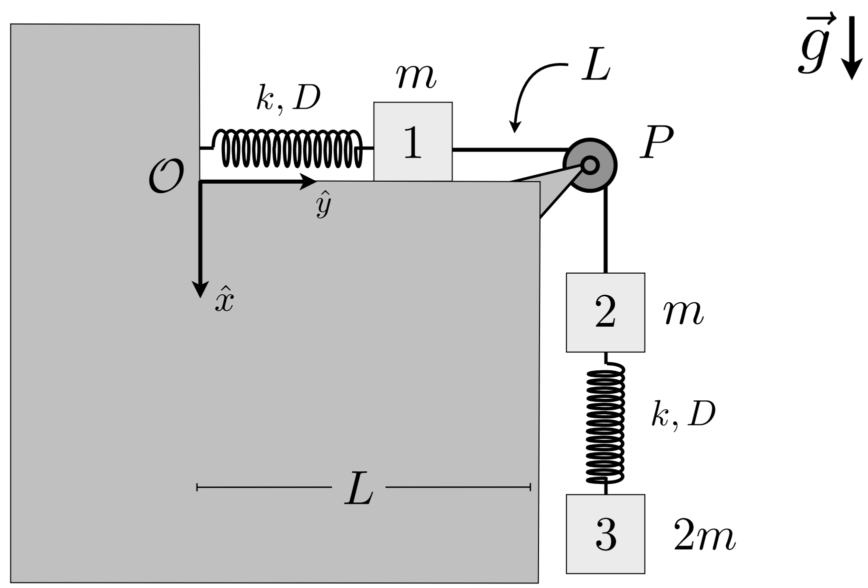
P2: Considere el sistema mostrado en la figura, el cual consiste de una guía metálica $ABCDE$ por la cual se desplaza una argolla de masa m. La argolla está unida a un resorte de masa despreciable, de constante elástica k y largo natural R, el cual está pivotado en un soporte fijo en el punto O. El tramo recto AB de la guía y el semicircular BCD (de radio R) no tienen roce, sin embargo el tramo recto DE tiene un coeficiente de roce cinético μ_c. En cierto instante el sistema se deja evolucionar libremente con la argolla ubicada inicialmente en la posición mostrada en la figura.

(a) Determine el máximo valor posible $m_{\max}$ de la masa m para que la argolla llegue al punto D.
(b) Calcule la máxima distancia X que alcanza la argolla, si justo al pasar por el punto D ésta se desprende del resorte. Considere que $m = \frac{3}{4} m_{\max}$, donde $m_{\max}$ es el valor encontrado en la parte (a).
(c) Suponga ahora que la argolla no se desprende del resorte, pero que la masa es apenas menor que el valor $m_{\max}$ encontrado en la parte (a). Es decir, escriba $m = (1-\epsilon) m_{\max}$ con $\epsilon \ll 1$. Encuentre la distancia δX que la argolla alcanza a recorrer después de pasar por D a orden $\mathcal{O}(\epsilon)$.



P3: El bloque 1 de la figura tiene masa m, permanece conectado a la pared $\mathcal{O}$ mediante un resorte (k, D) y puede deslizar sin roce sobre una superficie horizontal de largo L. El bloque 1 sostiene a un segundo bloque (2) de masa m que cuelga verticalmente mediante una cuerda ideal inextensible de largo L que pasa por la polea P. El segundo bloque sostiene a un tercer bloque (3) de masa $2m$ mediante un resorte (k, D). Use la coordenada y para designar la distancia de 1 desde $\mathcal{O}$ y la coordenada x para designar la distancia de 3 desde P (ver figura).

(a) Escriba la segunda ley de Newton para cada bloque.
(b) Obtenga expresiones para las posiciones de equilibrio estable x_{eq} e y_{eq} en términos de los datos del problema.
(c) Defina $x = x_{\text{eq}} + \delta x$ e $y = y_{\text{eq}} + \delta y$ y obtenga las ecuaciones de movimiento acopladas para δx y δy. Identifique la matriz de frecuencias Ω^2 y determine las frecuencias de oscilación de los modos normales.
(d) Deduzca los modos normales de oscilación correspondiente a cada frecuencia obtenida en la parte anterior. Haga un bosquejo que describa los modos.



Indicación: Para la parte (d) no es necesario que normalice los vectores propios de Ω^2. Puede usar la aproximación $\sqrt{5} \simeq 2.2$.

Solución P1: (a, 1pt) $\vec{L} = m\frac{L}{2}\hat{\rho} \times \frac{L}{2}\dot{\phi}\hat{\phi} + mL\hat{\rho} \times L\dot{\phi}\hat{\phi} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\phi}\hat{k}$. **(b, 1pt)** $\vec{\tau} = \vec{0} \times \vec{F}_{\text{bp}} + \frac{L}{2}\hat{\rho} \times (m\vec{g}) + L\hat{\rho} \times (m\vec{g})$, donde $\vec{F}_{\text{bp}}$ es la fuerza del bloque sobre el péndulo. Usando $\vec{g} = g(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi})$ obtenemos $\vec{\tau} = -\frac{3}{2}mgL\sin\phi\hat{k}$. **(c, 1pt)** Igualando $d\vec{L}/dt = \vec{\tau}$ obtenemos $\ddot{\phi} + \frac{6}{5}\frac{g}{L}\sin\phi = 0$. Integrando $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{6}{5}\frac{g}{L}\cos\phi = C$. Imponiendo condiciones iniciales $C = 0$, y por lo tanto $\dot{\phi}^2 = \frac{12}{5}\frac{g}{L}\cos\phi$. **(d, 1pt)** $\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{2m}(m\frac{L}{2}\hat{\rho} + mL\hat{\rho}) = \frac{3}{4}L\hat{\rho}$. Luego: $\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{3}{4}L\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{3}{4}L\dot{\phi}^2\hat{\rho}$. Por otro lado, $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{bp}} + 2m\vec{g}$. **(e, 1pt)** La segunda ley de Newton implica $2m(\frac{3}{4}L\ddot{\phi}\hat{\phi} - \frac{3}{4}L\dot{\phi}^2\hat{\rho}) = \vec{F}_{\text{bp}} + 2m\vec{g}$. Usando las expresiones para $\ddot{\phi}$ y $\dot{\phi}$ encontradas: $\vec{F}_{\text{bp}} = -\frac{9}{5}mg(\sin\phi\hat{\phi} + 2\cos\phi\hat{\rho}) - 2m\vec{g}$. Expresando en términos de $\hat{y}$ y $\hat{x}$ se encuentra $\vec{F}_{\text{bp}} = -\frac{27}{5}mg\left[\sin\phi\cos\phi\hat{x} - \cos\phi^2\hat{y}\right] + \frac{1}{5}mg\hat{y}$. **(f, 1pt)** La aceleración del bloque es 0, luego: $F_{\text{re}}\hat{x} + N\hat{y} - \frac{5}{2}mg\hat{y} + \vec{F}_{\text{pb}} = 0$, donde $\vec{F}_{\text{pb}} = -\vec{F}_{\text{bp}}$ es la fuerza que el péndulo ejerce sobre el bloque. Reemplazando $\vec{F}_{\text{pb}}$ obtenemos $F_{\text{re}} = -\frac{27}{5}mg\sin\phi\cos\phi$ y $N = \frac{27}{5}mg\cos\phi^2 + \frac{27}{10}mg$. El bloque se mueve cuando $\phi = \pi/4$. En este caso $|F_{\text{re}}| = \mu_e N$. Reemplazando: $\mu_e = 1/2$.

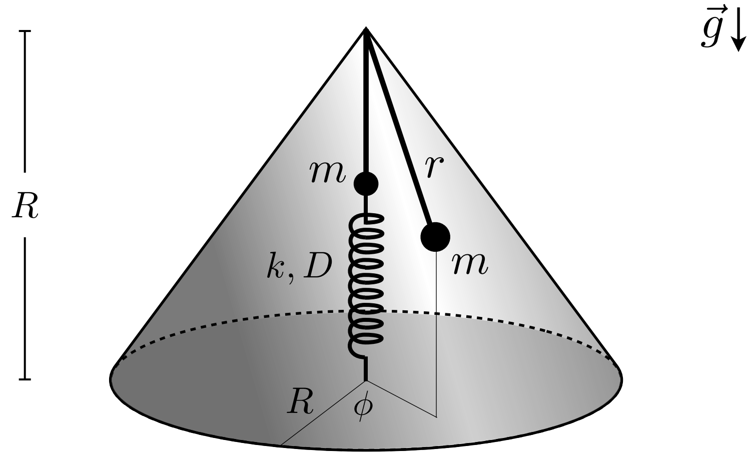
Solución P2: (a, 2pts) $E_{\text{ini}} = \frac{k}{2}(\sqrt{\left[(\sqrt{3}R)^2 + R^2\right]} - R)^2 = \frac{k}{2}R^2$ y $E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{k}{2}(R - R)^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mv_D^2 + 2mgR$. La energía se conserva $E_D = E_{\text{ini}}$, luego $v_D = \sqrt{\frac{k}{m}R^2 - 4gR}$. Usando $v_D = 0$ sigue $m_{\max} = \frac{k}{4g}R$. **(b, 2pts)** En el tramo DA tenemos $\vec{F}_{\text{rc}} = \hat{x}\mu_c||\vec{N}||$. Dado que la argolla se separa del resorte: $\vec{N} = mg\hat{y}$ y $\vec{F}_{\text{rc}} = \hat{x}\mu_c mg$. Usando $d\vec{r} = \hat{x}dx$ sigue $W_{\text{NC}} = \int_0^{-X} dx\mu_c mg = -\mu_c mgX$. Luego, de $E_F - E_A = W_{\text{NC}}$ obtenemos $2mgR - \frac{k}{2}R^2 = -\mu_c mgX$, de donde $X = 2R/3\mu_c$. **(c, 2pts)** Si la argolla sigue pegada al resorte tenemos $\vec{F}_k = -k(\sqrt{x^2 + R^2} - R)(x\hat{x} + R\hat{y})/\sqrt{x^2 + R^2}$. Luego $\vec{N} = \left[mg + kR(1 - R/\sqrt{x^2 + R^2})\right]\hat{y}$. Dado que x es pequeño $\vec{N} \simeq \left[mg + \frac{kx^2}{2R}\right]\hat{y}$. Luego $\vec{F}_{\text{rc}} = \hat{x}\mu_c\left[mg + \frac{kx^2}{2R}\right]$ y $W_{\text{NC}} = \int_0^{-\delta X} dx\mu_c\left[mg + \frac{kx^2}{2R}\right] = -\mu_c\left[mg\delta X + \frac{k}{6R}\delta X^3\right] \simeq -\mu_c mg\delta X$. Usando $E_{\text{fin}} - E_A = W_{\text{NC}}$ obtenemos $2mgR + \frac{k}{2}(\sqrt{[\delta X^2 + R^2]} - R)^2 - \frac{k}{2}R^2 = -\mu_c mg\delta X$. Usando $\sqrt{[\delta X^2 + R^2]} \simeq R$ y $m = (1 - \epsilon)\frac{k}{4g}R$ obtenemos $\delta X \simeq 2\epsilon R/\mu_c$.

Solución P3: (a, 1.5pts) Tenemos $m\ddot{y} = -k(y - D) + T$, $m\ddot{x}_2 = -T + mg + k(x - x_2 - D)$ y $2m\ddot{x} = 2mg - k(x - x_2 - D)$, donde x_2 es la distancia del bloque 2 a P. Dado que 1 y 2 están conectados por una cuerda de largo L, se tiene $x_2 = y$. Luego, las ecuaciones para 2 y 3 son: $m\ddot{y} = -T + mg + k(x - y - D)$ y $2m\ddot{x} = 2mg - k(x - y - D)$. **(b, 1.5pts)** Eliminando T obtenemos: $2m\ddot{y} = -2ky + mg + kx$. Los puntos de equilibrio requieren $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$. Se encuentra $x_{\text{eq}} = 2D + 5mg/k$ e $y_{\text{eq}} = D + 3mg/k$. **(c, 1.5pts)** Usando $x = x_{\text{eq}} + \delta x$ e $y = y_{\text{eq}} + \delta y$ sigue $\ddot{\delta x} + \frac{k}{2m}\delta x - \frac{k}{2m}\delta y = 0$, $\ddot{\delta y} - \frac{k}{2m}\delta x + \frac{k}{m}\delta y = 0$. Luego $\Omega^2 = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Los valores propios son $\omega_1^2 = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})\frac{k}{m}$ y $\omega_2^2 = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})\frac{k}{m}$. **(d, 1.5pts)** Los vectores propios son $\vec{e}_1 \propto (\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), 1)$ y $\vec{e}_2 \propto (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), -1)$. Aproximando $\vec{e}_1 \propto (0.6, 1)$ y $\vec{e}_2 \propto (1.6, -1)$. Estos vectores definen direcciones que se pueden bosquejar.

Mecánica FI2001-5
Control 3: Sábado 25 de junio, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró
Ayudantes: Sebastián Vargas y Antonia Villegas

P1: Un cono hueco de radio R y altura R, tiene un orificio pequeño en su extremo superior por el cual pasa una cuerda inextensible de largo R. Los extremos de la cuerda sostienen dos masas idénticas m, una de las cuales permanece unida a la base del cono mediante un resorte k de largo natural $D = \frac{mg}{k}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, mientras que la otra desliza sin roce sobre la superficie del cono. Utilice la coordenada r para denotar la distancia de la segunda masa a la punta del cono, y ϕ para denotar el ángulo entre la proyección de la cuerda sobre la base y un eje fijo (ver figura). En $t = 0$ se tienen $r = r_0$, $\dot{r} = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = \omega_0$.



(a) 2pts. Determine el Lagrangiano del sistema para las variables r y ϕ.

(b) 1pt. Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange.

(c) 1pt. Integre la ecuación para el ángulo ϕ y utilice su resultado para obtener una ecuación de movimiento exclusivamente en términos de r.

(d) 1pt. Determine el valor que debe tener la velocidad angular ω_0 para que r se mantenga constante ($r = r_0$).

(e) 1pt. Para el valor ω_0 encontrado en la parte (d), obtenga la ecuación de pequeñas oscilaciones para $\delta r \equiv r - r_0$. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

Indicación: Le puede ser útil recordar que la velocidad de una partícula en coordenadas esféricas vienen dadas por:

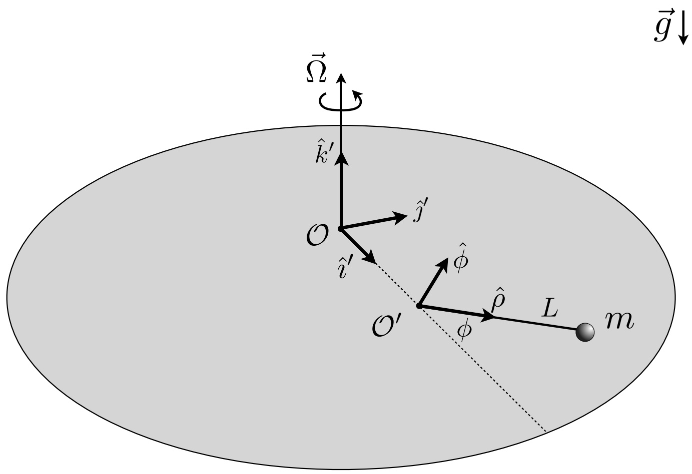
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}.$$

P2: La figura muestra un disco horizontal que gira en torno a su eje de simetría con velocidad angular $\vec{\Omega} = \Omega_0 \hat{k}'$. A una distancia R del centro $\mathcal{O}$ del disco hay un pivote $\mathcal{O}'$ que sostiene un péndulo de masa m y largo L (ver figura). El ángulo ϕ denota el ángulo entre la cuerda del péndulo y la recta que pasa por $\mathcal{O}\mathcal{O}'$. Note que los vectores $\hat{\imath}'$ y $\hat{\jmath}'$ de la figura satisfacen $\dot{\hat{\imath}}' = \Omega_0 \hat{\jmath}'$ y $\dot{\hat{\jmath}}' = -\Omega_0 \hat{\imath}'$.

(a) 2.5pts. Determine expresiones para cada fuerza no-inercial que participa en la segunda ley de Newton válida en el sistema de referencia solidario a la pared.

(b) 2.5pts. Encuentre la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ. Determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.

(c) 1pt. Suponga que en $t = 0$ se cumple $\phi = \phi_0$ y $\dot{\phi} = 0$. Encuentre una expresión para la tensión de la cuerda en función de ϕ.



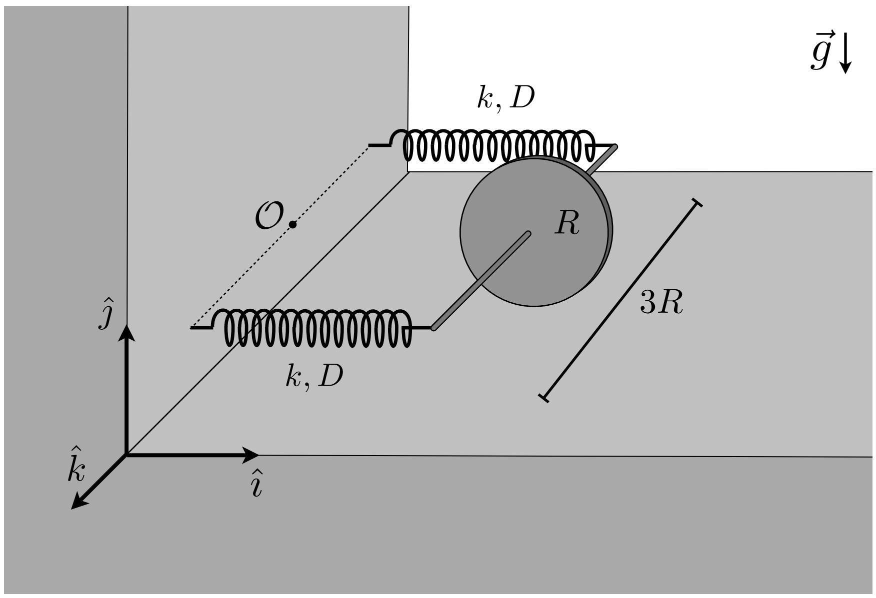
Indicación 1: Recuerde que la segunda ley de Newton en un sistema no inercial adquiere la forma:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\,\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}\,') - 2m\,\vec{\Omega} \times \vec{v}\,' - m\,\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}\,'.$$

Indicación 2: La posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares son:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}, \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}.$$

P3: El sólido de la figura consiste en un disco delgado de radio R y masa $M/2$ atravesado por una varilla de largo $3R$ y masa $M/2$. El disco rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal plana y los extremos de la varilla están unidos a una pared paralela mediante dos resortes idénticos de constante elástica k y largo natural $D > R$. Los resortes siempre permanecen horizontales (ver figura). Escriba la posición del centro de masas del sólido con respecto al origen $\mathcal{O}$ como $\vec{r}_{\rm CM} = (D + \delta x)\hat{\imath}$, donde δx es el desplazamiento horizontal del centro de masas con respecto al punto de equilibrio del sistema.



(a) 1pt. Encuentre la matriz de inercia del sólido con respecto a su centro de masas. Procure que la orientación del eje $\hat{k}'$ del sistema solidario al sólido coincida con el eje $\hat{k}$ de la figura.
(b) 1.5pts. Determine una expresión para el momento angular $\vec{L}_{\rm CM}$ del sólido con respecto a su centro de masas en términos de $\delta\dot{x}$.
(c) 2pts. Determine el torque total $\vec{\tau}_{\rm CM}$ que actúa sobre el sólido con respecto a su centro de masas. Junto con el resultado de la parte (b), obtenga una relación entre la fuerza de roce que el suelo ejerce sobre el sólido y la aceleración $\delta\ddot{x}$.
(d) 1.5pts. Obtenga la ecuación de movimiento del desplazamiento horizontal δx. Identifique la frecuencia de oscilaciones del sistema.

Indicación: Las matrices de inercia de un disco R, m con respecto a su centro de masas y una varilla L, m con respecto a su centro de masas son:

$$I_{\rm CM}^{\rm disco} = \frac{1}{4}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad I_{\rm CM}^{\rm varilla} = \frac{1}{12}mL^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución P1: **(a)** $\sin\theta = 1/\sqrt{2}$. La altura de la masa en el interior es $z = r$. Luego $K = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}^2) = m\dot{r}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2$ y $U = \frac{1}{2}k(r-D)^2 + mgr + mg(R - \frac{1}{\sqrt{2}}r) = \frac{1}{2}kr^2$+constantes (donde se usó el valor de D). Luego $L = m\dot{r}^2 + \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}kr^2$+const. **(b)** Las ecs de EL son $2m\ddot{r} - \frac{1}{2}mr\dot{\phi}^2 + kr = 0$ y $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}) = 0$. **(c)** $r^2\dot{\phi}$ es constante. Usando CI tenemos $\dot{\phi} = \frac{r_0^2\omega_0}{r^2}$. Insertando en la primera ec de EL: $\ddot{r} - \frac{1}{4}\frac{r_0^4\omega_0^2}{r^3} + \frac{k}{2m}r = 0$. **(d)** Para que $r = r_0$ se debe cumplir $\ddot{r} = 0$, de donde $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$. **(e)** Fijando $\omega_0 = \sqrt{2k/m}$ y escribiendo $r = r_0 + \delta r$ la parte (c) se reduce a: $\delta\ddot{r} + \frac{2k}{m}\delta r = 0$, de donde $\omega = \sqrt{2k/m}$.

Solución P2: **(a)** $\ddot{\vec{R}} = -R\Omega_0^2\hat{\imath}$. Las fuerzas NI son: $-m\ddot{\vec{R}} = mR\Omega_0^2(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi})$, $\vec{F}_{\text{centr}} = m\Omega_0^2 L\hat{\rho}$, $\vec{F}_{\text{Cor}} = 2mL\Omega_0\dot{\phi}\hat{\rho}$, y $\vec{F}_{\text{Eul}} = 0$. **(b)** La posición de m c/r a $\mathcal{O}'$ es $\vec{r}\,' = L\hat{\rho}$. Luego: $\vec{v}\,' = L\dot{\phi}\hat{\phi}$ y $\vec{a}\,' = L(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho})$. Además $\vec{F} = -mg\hat{k} + N\hat{k} - T\hat{\rho}$. Juntando todo en la segunda ley: $mL(\ddot{\phi}\hat{\phi} - \dot{\phi}^2\hat{\rho}) = -mg\hat{k} + N\hat{k} - T\hat{\rho} + mR\Omega_0^2(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) + m\Omega_0^2 L\hat{\rho} + 2mL\Omega_0\dot{\phi}\hat{\rho}$. La componente $\hat{\phi}$ entrega: $\ddot{\phi} + \frac{R}{L}\Omega_0^2\sin\phi = 0$. Luego: $\omega_0 = \sqrt{R/L}\,\Omega_0$. **(c)** Integrando: $\dot{\phi}^2 = 2\frac{R}{L}\Omega_0^2(\cos\phi_0 - \cos\phi)$. Luego: $T = m\Omega_0^2 L + mR\Omega_0^2(2\cos\phi_0 - \cos\phi) \pm 2mL\Omega_0\sqrt{2\frac{R}{L}\Omega_0^2(\cos\phi_0 - \cos\phi)}$. El signo $+$ es para $\dot{\phi} > 0$ y el $-$ para $\dot{\phi} < 0$.

Solución P3: **(a)** Usando la indicación con $m = M/2$ y $L = 3R$, y sumando ambas matrices: $I_{\text{CM}}^{\text{solido}} = \frac{1}{4}MR^2\text{Diag}\,(2,2,1)$. **(b)** La velocidad angular es $\vec{\Omega} = -\frac{\delta\dot{x}}{R}\hat{k}$. Luego $\vec{L}_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}^{\text{solido}}\vec{\Omega} = -\frac{1}{4}MR\delta\dot{x}\hat{k}$. **(c)** Los torques c/r al CM son $\vec{\tau}_{\text{CM}}^{\,g} = 0$, $\vec{\tau}_{\text{CM}}^{\,k} = (\frac{3}{2}R\hat{k}) \times (-k\delta x\hat{\imath}) + (-\frac{3}{2}R\hat{k}) \times (-k\delta x\hat{\imath}) = 0$, $\vec{\tau}_{\text{CM}}^{\,N} = (-R\hat{\jmath}) \times (N\hat{\jmath}) = 0$, $\vec{\tau}_{\text{CM}}^{\,\text{re}} = (-R\hat{\jmath}) \times (F_{\text{re}}\hat{\imath}) = RF_{\text{re}}\hat{k}$. Usando $\dot{\vec{L}}_{\text{CM}} = \vec{\tau}_{\text{CM}}$ se encuentra $F_{\text{re}} = -\frac{1}{4}M\delta\ddot{x}$. **(d)** Las fuerza son $\vec{F}_g = -Mg\hat{\jmath}$, $\vec{F}_k = -2k\delta x\hat{\imath}$, $\vec{N} = N\hat{\jmath}$ y $\vec{F}_{\text{re}} = F_{\text{re}}\hat{\imath}$. A partir de $M\vec{a}_{\text{CM}} = \vec{F}^{\text{tot}}$ se obtiene $M\delta\ddot{x} + 2k\delta x = F_{\text{re}}$. Con (d), vemos que: $\delta\ddot{x} + \frac{8}{5}\frac{k}{M}\delta x = 0$. Luego $\omega = \sqrt{8k/5M}$.

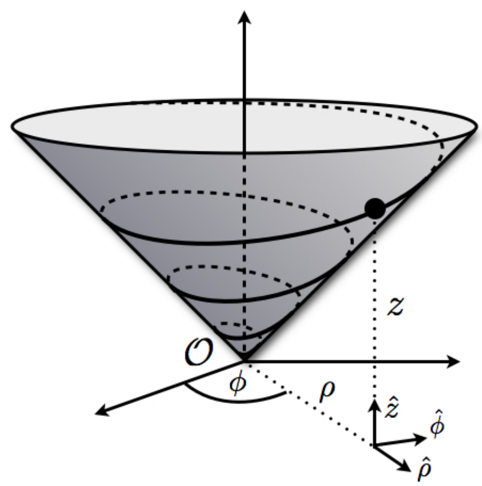
Mecánica FI2001-5
Ejercicio 1: Jueves 24 de marzo, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

Un punto P se mueve en una trayectoria que, descrita en coordenadas **cilíndricas**, satisface $z(t) = \rho(t)$, $dz = R\,d\phi$ y $\phi = \omega_0 t$. Se trata de una trayectoria apoyada en una superficie cónica, como lo indica la figura. Para $t = 0$ se cumple $z = 0$.

(a) Encuentre la velocidad de P en coordenadas **esféricas** para un tiempo cualquiera. Es decir, encuentre expresiones para las componentes v_r, v_ϕ y v_θ del vector $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\phi\hat{\phi} + v_\theta\hat{\theta}$ en términos de R y ω_0.

(b) Obtenga la velocidad angular de P con respecto al origen en coordenadas **esféricas** en términos de ω_0.



Recuerde: La velocidad en coordenadas esféricas viene dada por $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$. Además, la velocidad angular es $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}/||\vec{r}||^2$.

Solución: Del enunciado se deduce (imponiendo condiciones iniciales) que $z(t) = R\omega_0 t$. Por geometría se tiene que $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. Luego $r(t) = \sqrt{2}R\omega_0 t$. Notemos que $\theta = \pi/4$, por lo que $\dot{\theta} = 0$. Entonces, usando la ayuda, tenemos:

$$\vec{v} = \sqrt{2}R\omega_0\hat{r} + \frac{1}{2}\sqrt{2}R\omega_0^2 t\hat{\phi}, \tag{1}$$

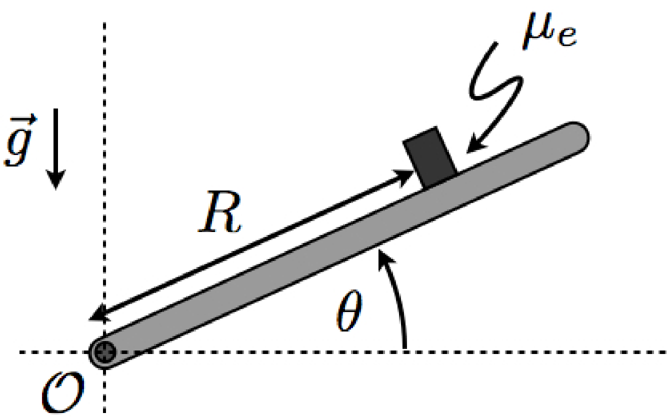
donde usamos $\sin(\pi/4) = 1/2$. Realizando el producto cruz, finalmente obtenemos

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2R^2\omega_0^2 t^2}(\sqrt{2}R\omega_0 t\hat{r}) \times (\sqrt{2}R\omega_0\hat{r} + \frac{1}{2}\sqrt{2}R\omega_0^2 t\hat{\phi}) = -\frac{1}{2}\omega_0\hat{\theta}. \tag{2}$$

Mecánica FI2001-5
Ejercicio 4: Martes 3 de mayo, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

En el sistema de la figura, la barra rota en torno a la rótula $\mathcal{O}$ con aceleración angular constante $\alpha = 2g/R$, habiendo iniciado su movimiento desde la posición $\theta = 0$, con $\dot{\theta} = 0$. Una partícula de masa m descansa sobre la barra a una distancia R de $\mathcal{O}$. Determine el mínimo coeficiente de roce estático μ_e que debe existir entre la partícula y la barra para que la partícula no deslice en el intervalo $0 < \theta < \pi$.



Recuerde: La posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares vienen dadas por:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}, \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}. \tag{1}$$

Solución: Se nos dice que la aceleración angular es $\alpha = 2g/R$. Luego se tiene que $\dot{\theta} = 2gt/R$ y $\theta = gt^2/R$. Por lo tanto la aceleración viene dada por

$$\vec{a} = -\frac{4g^2t^2}{R}\hat{\rho} + 2g\hat{\theta} \tag{2}$$

La fuerza total sobre la masa es $\vec{F} = -mg(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{\rho}) + N\hat{\theta} - F_{\mathrm{re}}\hat{\rho}$. De la segunda ley de Newton sigue que

$$-m\frac{4g^2t^2}{R}\hat{\rho} + 2mg\hat{\theta} = -mg(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{\rho}) + N\hat{\theta} - F_{\mathrm{re}}\hat{\rho} \tag{3}$$

Igualando componentes obtenemos las incognitas $F_{\mathrm{re}} = m\frac{4g^2t^2}{R} - mg\sin\theta$, y $N = mg(2 + \cos\theta)$. Recordemos que $F_{\mathrm{re}} \leq \mu_e N$. Luego (usando $\theta = gt^2/R$) se tiene que

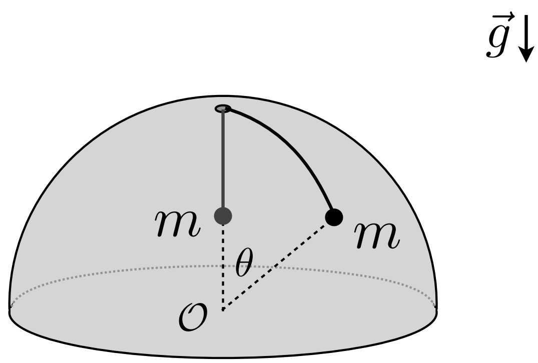
$$4\theta - \sin\theta \leq \mu_e\,(2 + \cos\theta) \tag{4}$$

La partícula deslizará cuando se satisfaga la igualdad. De este modo, el mínimo μ_e se obtiene reemplazando $\theta = \pi$ e imponiendo la igualdad obtenemos: $\mu_e = 4\pi$.

Mecánica FI2001-5
Ejercicio 5: Martes 14 de junio, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

Un casquete semi-esférico de radio R tiene un orificio pequeño en su parte superior. Por él, pasa una cuerda ideal inextensible de largo $\pi R/2$ con dos masas idénticas m en sus extremos. Una de las masas cuelga verticalmente desde el orificio, mientras que la otra siempre permanece en contacto con la superficie del casquete (ver figura). Inicialmente, la masa sobre el casquete es tal que $\theta = \pi/4$, $\dot{\theta} = 0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = \omega_0$.



(a) Obtenga una expresión para el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas esféricas θ y ϕ que denotan la posición de la masa sobre el casquete.

(b) Derive las ecuaciones de Eüler-Lagrange asociadas a θ y ϕ.

(c) Note que ϕ es una coordenada cíclica (el Lagrangiano depende de $\dot{\phi}$ pero no de ϕ). Esto implica que $\ell_\phi \equiv \partial L/\partial\dot{\phi}$ es una constante de movimiento. Use esto para determinar una expresión para $\dot{\phi}$ en función de θ.

(e) Use el resultado de la parte (c) para eliminar $\dot{\phi}$ de la ecuación de Eüler-Lagrange asociada a θ. A partir de este resultado, determine el valor de ω_0 para que la trayectoria alrededor del casquete sea circular (con $\theta = \pi/4$).

Recuerde: La posición y velocidad en coordenadas esféricas vienen dadas por:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \qquad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}. \tag{1}$$

Solución: **(a)** Debido a la cuerda, la altura de la masa que cuelga (con respecto al orificio) es $R(\theta - \pi/2)$ (también se puede considerar la altura con respecto al origen de la esfera). Luego, el Lagrangiano del sistema es $L = mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mgR\theta + mgR\cos\theta$+constantes. **(b)** Las ecuaciones de E-L son

$$2\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 + \frac{g}{R}(\sin\theta - 1) = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0. \tag{2}$$

(c) $\ell_\phi = mR^2\sin^2\theta\dot{\phi} = \frac{1}{2}mR^2\omega_0$. Esto implica que $\dot{\phi} = \frac{\omega_0}{2\sin^2\theta}$. **(d)** Insertando el resultado anterior en la ecuación de E-L para θ obtenemos:

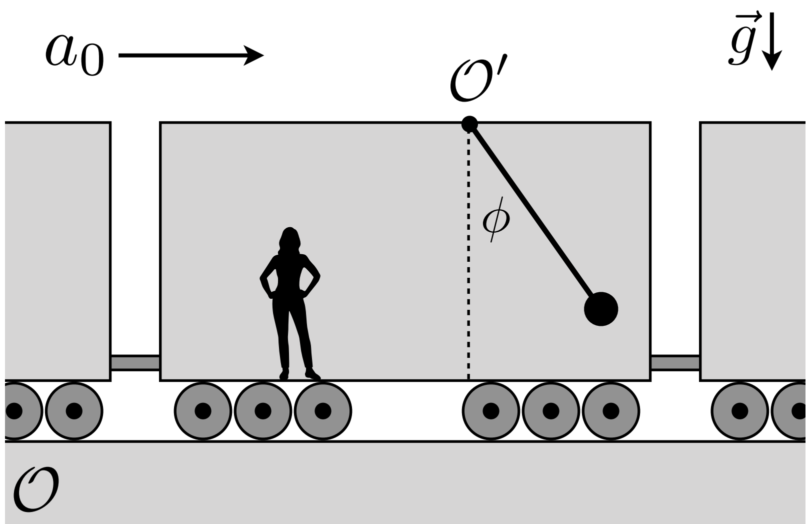
$$\ddot{\theta} - \frac{\omega_0^2\cos\theta}{8\sin^3\theta} + \frac{g}{2R}(\sin\theta - 1) = 0. \tag{3}$$

El movimiento circular corresponde a $\ddot{\theta} = 0$. Luego $\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{R}(1 - 1/\sqrt{2})}$.

Mecánica FI2001-5
Ejercicio 6: Jueves 23 de junio, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró

La figura muestra un tren que se desplaza hacia la derecha con aceleración constante a_0. Desde un pivote $\mathcal{O}'$ en el techo de uno de los vagones, pende un péndulo de masa m y largo L. Encuentre la ecuación de movimiento del ángulo ϕ del péndulo, y determine el ángulo ϕ_* para la configuración de equilibrio estable.



Indicación 1: Recuerde que la segunda ley de Newton en un sistema no inercial adquiere la forma:

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\,\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') - 2m\,\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' - m\,\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}\,'.$$

Indicación 2: La posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares son:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho}, \qquad \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi}, \qquad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}.$$

Solución: Se tiene que $\ddot{\vec{R}} = a_0\hat{x}$, donde $\hat{x}$ apunta hacia la derecha. Con $\vec{\Omega} = 0$ la segunda Ley de Newton adquiere la forma $m\vec{a}\,' = \vec{F} - ma_0\hat{x}$. Usando $\vec{a}\,' = -L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}$, $\hat{F} = mg(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) - T\hat{\rho}$ y $\hat{x} = \cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}$ la segunda ley de Newton queda como:

$$m(-L\dot{\phi}^2\hat{\rho} + L\ddot{\phi}\hat{\phi}) = mg(\cos\phi\hat{\rho} - \sin\phi\hat{\phi}) - T\hat{\rho} - ma_0(\cos\phi\hat{\phi} + \sin\phi\hat{\rho}). \tag{1}$$

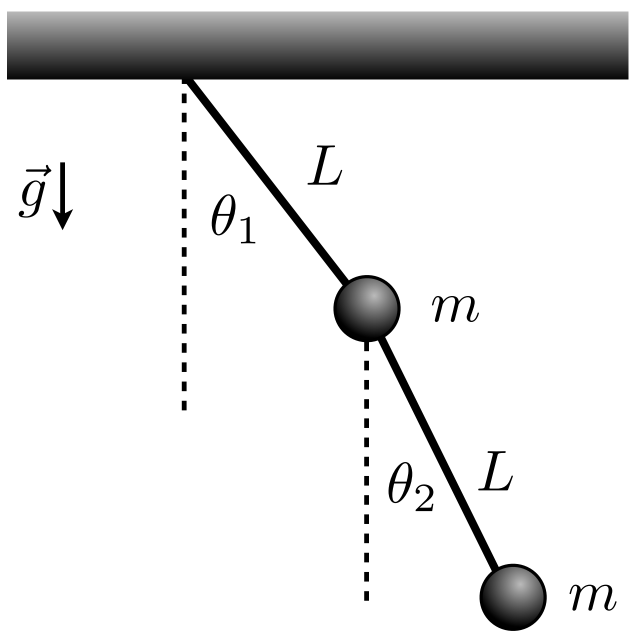
La componente $\hat{\phi}$ entrega la ecuación $\ddot{\phi} + \frac{1}{L}(g\sin\phi + a_0\cos\phi) = 0$. El ángulo de equilibrio corresponde al caso $\ddot{\phi} = 0$, el cual da $\phi_* = -\arctan(a_0/g)$.

Mecánica FI2001-5
Examen: Jueves 14 de julio, 2022

Prof. Gonzalo A. Palma. - Aux's: Esteban Araneda y Fernanda Padró
Ayudantes: Sebastián Vargas y Antonia Villegas

P1: Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente en el plano vertical (ver figura). Las oscilaciones del sistema se describen respecto a los ángulos θ_1 y θ_2 que cada péndulo forma con la vertical (ver figura).

(a) 2pts. Encuentre el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas θ_1 y θ_2, y velocidades $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$.
(b) 2pts. Determine las ecuaciones de Euler-Lagrange para ambos ángulos.
(c) 1pt. Deduzca las ecuaciones lineales acopladas para θ_1 y θ_2 válidas en el régimen de pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio estable $\theta_1 = \theta_2 = 0$.
(d) 1pt. Determine las frecuencias propias del sistema.



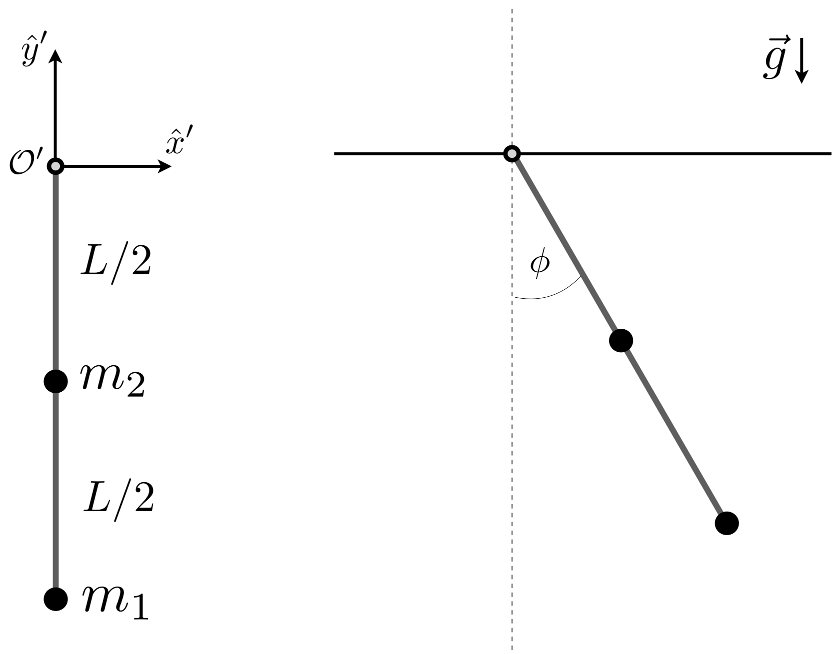
P2: Considere un péndulo formado por una barra rígida de masa despreciable y largo L, la cual tiene adheridas dos masas m_1 y m_2 ubicadas en el extremo y en la mitad de la barra respectivamente (ver figura).

(a) 1.5pts. Determine el tensor de inercia respecto al extremo superior $\mathcal{O}'$ del péndulo (figura derecha).

(b) 1pt. Determine el momento angular del péndulo respecto del extremo superior del péndulo si éste rota con una velocidad angular $\dot{\phi}$ en $\hat{z}$.

(c) 2pts. Calcule el torque total sobre el péndulo con respecto al extremo superior. A partir de este resultado, obtenga la ecuación de movimiento para el ángulo ϕ y determine la frecuencia para pequeñas oscilaciones

(d) 1.5pts. Determine el Lagrangiano del sistema y compruebe a partir de éste su resultado de la parte (c).



P3: Un sólido rígido consiste en la mitad de un disco delgado de radio R y densidad uniforme σ (ver figura).

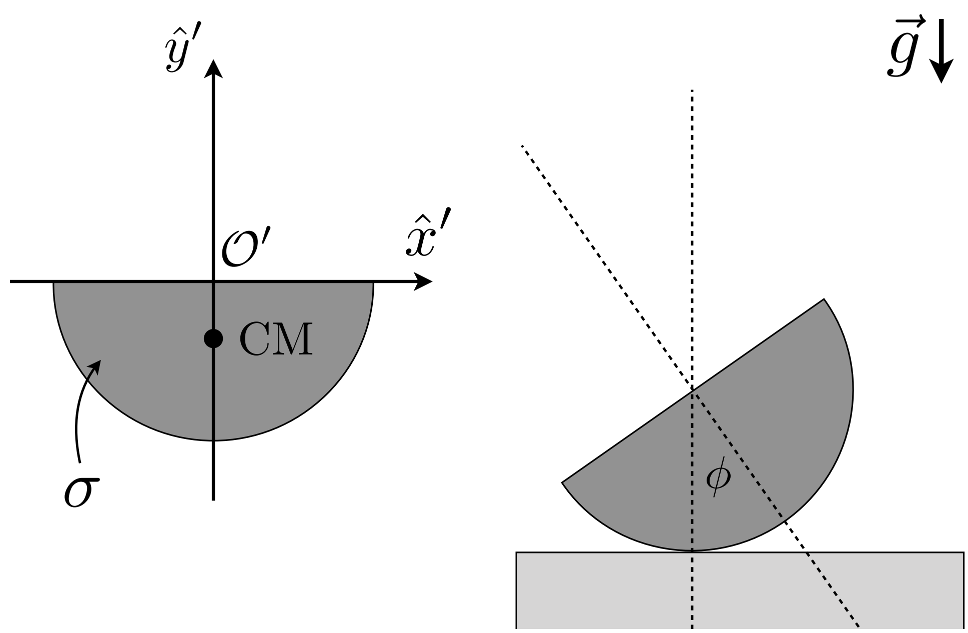
(a) 1pts. Determine una relación entre σ y la masa total M del sólido.

(b) 1pts. Determine la posición del centro de masas $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{1}{M}\int dm\,\vec{r}$ del sólido con respecto al origen $\mathcal{O}'$ (figura izquierda). Exprese su resultado con respecto el sistema de referencia solidario al sólido mostrado en la figura.

(c) 1.5pts. Determine el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al disco que pasa por $\mathcal{O}'$ (componente zz de la matriz de inercia $I_{\mathcal{O}'}$). Exprese su resultado en función de la masa total M del disco y R.

(d) 1pt. A partir del resultado anterior, obtenga el momento de inercia del sólido respecto a un eje perpendicular al disco que pasa por CM (componente zz de la matriz de inercia $I_{\rm CM}$).

(e) 1.5pts. Si el sólido rueda sin resbalar sobre un plano horizontal, encuentre la energía mecánica total como función de ϕ y $\dot{\phi}$ (ver figura derecha).



Indicación: Recuerde que para superficies se tiene $dm = \sigma dA$ donde σ es la densidad superficial y dA es el infinitésimo de área. En coordenadas polares se tiene $dA = r dr d\theta$.

Fórmulas útiles:

La matriz de inercia es con respecto a un punto $\mathcal{O}'$ solidario al sólido constituido por N partículas:

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \left(||\, \vec{r}_i{}' \,||^2 \, \mathbb{I} - \vec{r}_i{}' \, \vec{r}_i{}'^{\,t} \right) . \tag{1}$$

En el caso de un sólido continuo:

$$I_{\mathcal{O}'} \equiv \int dm \left(||\, \vec{r}\,'||^2 \, \mathbb{I} - \vec{r}\,' \, \vec{r}\,'^{\,t} \right) . \tag{2}$$

El teorema de Steiner es:

$$I_{\mathcal{O}'} = I_{\mathrm{CM}} + M_{\mathrm{tot}} \left[||\vec{r}\,'_{\mathrm{CM}}||^2 \mathbb{I} - \vec{r}\,'_{\mathrm{CM}} \vec{r}\,'^{t}_{\mathrm{CM}} \right] . \tag{3}$$

Recuerde que $\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{L}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}} + \vec{L}_{\mathrm{CM}}$, donde

$$\vec{L}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{CM}} = M \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}}, \qquad \vec{L}_{\mathrm{CM}} = I_{\mathrm{CM}} \vec{\Omega}. \tag{4}$$

Además la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_{\mathrm{CM}}^{\,2} + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{\,t} I_{\mathrm{CM}} \vec{\Omega}. \tag{5}$$

Si $\mathcal{O} = P$ es un punto fijo del sólido:

$$\vec{L}_P = I_{\mathrm{P}} \vec{\Omega}, \tag{6}$$

y la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2} \vec{\Omega}^{\,t} I_P \vec{\Omega}. \tag{7}$$

La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada generalizada x_i a partir del Lagrangiano $L = K - U$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = 0 \, . \tag{8}$$

Solución P1: **(a)** Las posiciones son: $\vec{r}_1 = L\sin\theta_1\hat{\imath} - L\cos\theta_1\hat{\jmath}$ y $\vec{r}_2 = (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)\hat{\imath} - L(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\hat{\jmath}$. Luego, las velocidades son $\vec{v}_1 = L\dot{\theta}_1\cos\theta 1\hat{\imath} + L\ \dot{\theta}_1\sin\theta_1\hat{\jmath}$ y $\vec{v}_2 = L(\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2\cos\theta_2)\hat{\imath} + L(\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{\theta}_2\sin\theta_2)\hat{\jmath}$. Además $K = \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2$. Luego $K = mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + mL^2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$. Además $U = -2mgL\cos\theta_1 + mgL\cos\theta_2$. Luego $L = K - U$. **(b)** Las ecuaciones de E-L son: $2\ddot{\theta}_1 + \cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 + \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2\frac{g}{L}\sin\theta_1 = 0$, y $\ddot{\theta}_2 + \cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - \sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{g}{L}\sin\theta_2 = 0$. **(c)** Usando $\theta_1 \ll 1$ y $\theta_2 \ll 1$ obtenemos $2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\frac{g}{L}\theta_1 = 0$ y $\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{L}\theta_2 = 0$. **(d)** Combinando: $\ddot{\theta}_1 + 2\frac{g}{L}\theta_1 - \frac{g}{L}\theta_2 = 0$, y $\ddot{\theta}_2 - 2\frac{g}{L}\theta_1 + 2\frac{g}{L}\theta_2 = 0$. Sigue que $\Omega^2 = \frac{g}{L}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ de donde: $\omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\frac{g}{L}$ y $\omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\frac{g}{L}$.

Solución P2: **(a)** Usando la fórmula de la matriz de inercia es directo encontrar:

$$I_{\mathcal{O}'} = m_2\frac{L^2}{4}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} + m_1L^2\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \left(\frac{m_2}{4} + m_1\right)L^2\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(b) El momento angular del péndulo c/r al punto fijo $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ es $\vec{L}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}'}(\dot{\phi}\hat{z}) = \left(\frac{m_2}{4} + m_1\right)L^2\dot{\phi}\hat{z}$. **(c)** El torque c/r a $\mathcal{O}$ es $\vec{\tau}_{\mathcal{O}} = \frac{L}{2}\hat{\rho}\times\vec{m}_2g + L\hat{\rho}\times\vec{m}_1g = -gL\left(\frac{m_2}{2} + m_1\right)\sin\phi\hat{z}$. Usando $\frac{d}{dt}\vec{L}_{\mathcal{O}} = \vec{\tau}_{\mathcal{O}}$ encontramos $\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\left(\frac{4m_1+2m_2}{4m_1+m_2}\right)\sin\phi = 0$. Sigue que $\omega^2 = \frac{g}{L}\left(\frac{4m_1+2m_2}{4m_1+m_2}\right)$.
(d) $L = K - U = \frac{1}{2}(\dot{\phi}\hat{z})^t I_{\mathcal{O}'}(\dot{\phi}\hat{z}) + Lg\left(\frac{m_2}{2} + m_1\right)\cos\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{m_2}{4} + m_1\right)L^2\dot{\phi}^2 + Lg\left(\frac{m_2}{2} + m_1\right)\cos\phi$. De la ecuación de E-L es directo recobrar (c).

Solución P3: **(a)** $M = \int dm = \int_\pi^{2\pi}\int_0^R \sigma r dr d\theta = \sigma \times \pi \times \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}\pi\sigma R^2$. **(b)** $\vec{r}_{\rm CM} = \frac{1}{M}\int_\pi^{2\pi}\int_0^R \sigma r(r\vec{r})drd\theta = \frac{1}{M}\int_\pi^{2\pi}\int_0^R \sigma r^2(\cos\theta\hat{x}' + \sin\theta\hat{y}')drd\theta = \frac{\hat{y}'\sigma}{M}\times(-2)\times\frac{1}{3}R^3$. Luego $\vec{r}_{\rm CM} = -\frac{4}{3\pi}R\hat{y}'$. **(c)** La matriz de inercia del sólido c/r a $\mathcal{O}'$ es:

$$I_{\mathcal{O}'} = \int_\pi^{2\pi}\int_0^R \sigma\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} rdrd\theta. \tag{10}$$

Usando $x = r\cos\theta$, $y = \sin\theta$ y $z = 0$ la componente zz es $I_{\mathcal{O}'}^{zz} = \int_\pi^{2\pi}\int_0^R \sigma r^3 drd\theta = \frac{1}{2}MR^2$. **(d)** Usando Steiner: $I_{\rm CM} = I_{\mathcal{O}'} - M(||\vec{r}_{\rm CM}||^2\mathbb{I} - \vec{r}_{\rm CM}\vec{r}_{\rm CM}^{\,t})$. Usando parte (b) $I_{\rm CM}^{zz} = \frac{1}{2}MR^2 - M||\vec{r}_{\rm CM}||^2 = (\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2})MR^2$. **(e)** Fijemos el origen $\mathcal{O}$ en el punto donde el sólido está en contacto con el suelo cuando $\theta = 0$. Luego, la posición del CM c/r a $\mathcal{O}$ es $\vec{r}_{\rm CM} = -R\phi\hat{x} + R\hat{y} + \frac{4}{3\pi}R\hat{\rho}$. Entonces $\vec{v}_{\rm CM} = -R\dot{\phi}\hat{x} + \frac{4}{3\pi}R\dot{\phi}\hat{\phi}$. Luego, $K = \frac{1}{2}M(-R\dot{\phi}\hat{x} + \frac{4}{3\pi}R\hat{y}'\dot{\phi}\hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}I_{\rm CM}^{zz}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M(\frac{3}{2} - \frac{8}{3\pi}\cos\phi)R^2\dot{\phi}^2$. Además $U = mg\vec{r}_{\rm CM}\cdot\hat{y} = mgR(1 - \frac{4}{3\pi}\cos\theta)$.