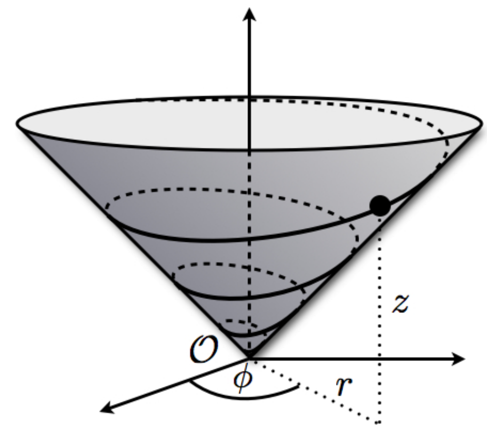
FI-2001 Mecánica - Sección-3
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Sebastián Céspedes y Sebastián Moya
FCFM, Universidad de Chile

Control 1
Miércoles 6 de Abril, 2011
Tiempo: 3horas

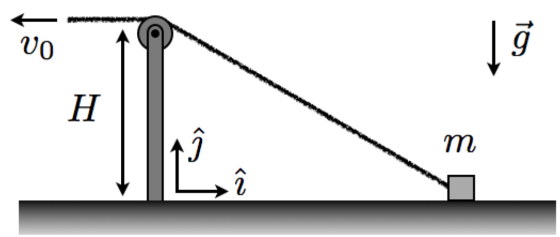
P1: Un punto P se mueve en una trayectoria que, descrita en coordenadas cilíndricas, satisface $z(t) = \rho(t)$, $dz/\phi = R$ y $\phi = \omega t$. Se trata de una trayectoria apoyada en una superficie cónica, como lo indica la figura. Para $t = 0$ se cumple $z = 0$.



(a) Usando coordenadas cilíndricas, escriba los vectores posición y velocidad para un tiempo cualquiera.

(b) Obtenga el vector $\hat{t}$ tangente a la trayectoria y el radio de curvatura asociados a cada punto de la trayectoria.

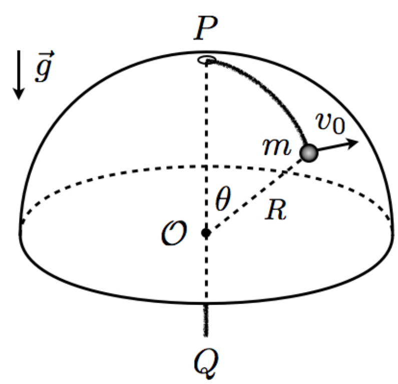
P2: Una masa m es tirada por una cuerda ideal que es recogida a una velocidad constante v_0 pasando por el extremo superior de una barra vertical de altura H, como muestra la figura. La partícula desliza sobre una superficie horizontal, la que ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}_R$ que se opone al movimiento y que es proporcional a la normal que ejerce el suelo sobre la partícula. Es decir $\vec{F}_R = \mu||\vec{N}||\hat{\imath}$.



(a) Demuestre que la magnitud de la aceleración horizontal de la masa es inversamente proporcional al cubo de su distancia a la barra. Determine la constante de proporcionalidad.

(b) Encuentre la distancia a la barra en que la partícula se separa de la superficie horizontal.

P3: Considere una partícula de masa m que puede deslizar sin roce sobre un cascarón semi-esférico hueco de radio R. La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto P, como muestra la figura.



(a) Si el extremo Q de la cuerda se mantiene fijo tal que el ángulo cenital de la partícula se mantiene siempre en $\theta = 60^o$, determine la máxima rapidez v_0 que la partícula puede tener, tal que ella describa un movimiento circular uniforme en torno al eje $\mathcal{O}P$ sin separarse del cascarón.

(b) Si la partícula tiene inicialmente una rapidez acimutal v_1, menor al valor determinado en (a), y el extremo Q de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_Q, encuentre una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función de su ángulo cenital θ.

Ayuda: Algunas relaciones cinemáticas en coordenadas esféricas: ($\vec{r} = r\hat{r}$)

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)\hat{\phi}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\phi}\hat{\phi}\sin\theta + \dot{\theta}\hat{\theta}, \qquad \dot{\hat{\theta}} = \dot{\phi}\cos\theta\hat{\phi} - \dot{\theta}\hat{r}, \qquad \dot{\hat{\phi}} = -\dot{\phi}(\cos\theta\hat{\theta} + \sin\theta\hat{r})$$

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Universidad de Chile

Mecánica

Profesor de Catedra: Gonzalo Palma

Profesores auxs.: Sebastian Moya V. - Sebastian Cespedes C.

Pauta P2 C1

(a) Para el largo de la hipotenusa tenemos la siguiente ecuacion $L(t)$:

$$L(t) = \sqrt{x^2 + H^2}$$

derivando con respecto al tiempo y sabiendo además que $\dot{L} = -V_0$ se obtiene

$$\dot{x} = \frac{-V_0\sqrt{x^2 + H^2}}{x} = \frac{-LV_0}{x}$$

derivando con respecto al tiempo el término de la derecha ya que es más fácil de manejar se llega a lo siguiente

$$\ddot{x} = -V_0(\frac{\dot{L}x - \dot{x}L}{x^2})$$

$$\ddot{x} = -V_0(\frac{-V_0x^2 + V_0H^2 + V_0x^2}{x^3})$$

$$\text{con lo que } \ddot{x} = \frac{-V_0^2H^2}{x^3}$$

con una constante de proporcionalidad igual a $-V_0^2H^2$

(b) Haciendo el D.C.L correspondiente tenemos que

$$m\ddot{x} = N\mu - T\cos\theta \tag{1}$$

$$N + T\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \tag{2}$$

condición de despegue $N = 0$

despejamos la tensión de (1) $T = \frac{-m\ddot{x}}{\cos\theta}$ y de (2) $T = \frac{mg}{\operatorname{sen}\theta}$

igualando ambas ecuaciones llegamos a

$$\frac{-g}{\ddot{x}_*} = \tan\theta_*$$

$$\text{con } \tan\theta_* = \frac{H}{x}$$

$$\text{reemplazando llegamos a } x_* = (\frac{V_0^2H^3}{g})^{\frac{1}{4}}$$

Mecánica
Profesor de Catedra: Gonzalo Palma
Profesores auxs.: Sebastian Moya V. - Sebastian Cespedes C.
Pauta P3 C1

(a)Utilizaremos coordenadas esféricas

$$\theta_0 = cte, \dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_0 = 0$$
$$r = R, \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\vec{r} = R\hat{r} \tag{1}$$
$$\vec{v} = R\dot{\phi}\sin\theta_0\hat{\phi} \tag{2}$$
$$\vec{a} = \left(-R\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0\right)\hat{r} + \left(-R\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0\right)\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta_0}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0\right)\hat{\phi} \tag{3}$$

Por la segunda ley de Newton tenemos lo siguiente

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$m\vec{a} = N\hat{r} - T\hat{\theta} + mg\sin\theta\hat{\theta} - mg\cos\theta\hat{r}$$

$$(\hat{r}) \Rightarrow -mR\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0 = N - mg\cos\theta_0 \tag{4}$$
$$(\hat{\theta}) \Rightarrow -mR\dot{\phi}^2\sin\theta_0\cos\theta_0 = mg\sin\theta_0 - T \tag{5}$$
$$(\hat{\phi}) \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta_0\right) = 0 \tag{6}$$

De (1) despejamos N

$$N = mg\cos\theta_0 - mR\dot{\phi}^2\sin^2\theta_0$$

Condición para que no se despegue $N > 0$, condición máxima $N = 0$, entonces

$$mg\cos\theta_0 = mR\dot{\phi}_*^2\sin^2\theta_0 \tag{7}$$

$\Rightarrow \dot{\phi}_* = \sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{R\sin^2\theta_0}}$, entonces para que no se separe $\dot{\phi} < \sqrt{\frac{g\cos\theta_0}{R\sin^2\theta_0}}$

Con lo que obtenemos la velocidad máxima $\vec{V}_* = R\sin\theta_0\hat{\phi}_* = \sqrt{Rg\cos\theta_0}$

(b) $\vec{V}_0 = V_0\hat{\phi}$, $r = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

Condición para el movimiento de la cuerda inextensible de largo L

$$L = z + R\theta / \frac{d}{dt}$$

$$0 = V_Q + R\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{-v_Q}{R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

Reescribimos las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración para este caso

$$\vec{r} = R\hat{r} \tag{8}$$
$$\vec{v} = R\left(\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} - \frac{V_Q}{R}\hat{\theta}\right) \tag{9}$$
$$\vec{a} = \left(\frac{-V_Q^2}{R} - R\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)\hat{r} + \left(-R\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right)\hat{\phi} \tag{10}$$

⇒ Ahora las ecuaciones de movimiento quedan como sigue.

$$(\hat{r}) \Rightarrow -m\left(\frac{V_Q^2}{R} + R\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) = N - mg\cos\theta \tag{11}$$

$$(\hat{\theta}) \Rightarrow -mR\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -T + mg\sin\theta \tag{12}$$

$$(\hat{\phi}) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right) = 0 \tag{13}$$

$$\text{Veamos que} \qquad \vec{V_0} = V_0\hat{\phi} = R\dot{\phi}_0\sin\theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_0 = \frac{V_0}{R\sin\theta_0}$$

Ahora la ecuación (13) integrada queda así $R^2\dot{\phi}\sin^2\theta = K$, evaluando las condiciones inciales

$$R^2\dot{\phi}\sin^2\theta = R^2\dot{\phi}_0\sin^2\theta_0$$

$$\dot{\phi} = \frac{V_0\sin^2\theta_0}{R\sin\theta_0\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{V_0\sin\theta_0}{R\sin^2\theta}$$

Despejando en (11) la $\vec{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{N} = m\left(g\cos\theta - \left(\frac{V_Q^2}{R} + \frac{V_0^2}{R}\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}\right)^2\right)\right)$$

FI-2001 Mecánica - Sección-3
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Ernesto Berrios y Tomás Muller
FCFM, Universidad de Chile

Control 1

Miércoles 9 de Abril, 2014
Tiempo: 3horas

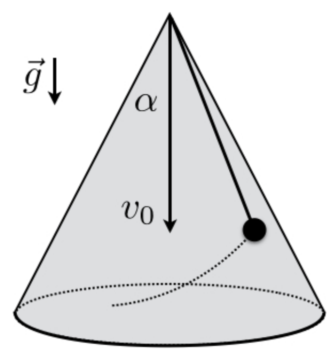
P1: En el plano XY una partícula P comienza su movimiento en el origen y se mueve siempre con rapidez v_0 siguiendo una trayectoria tal que la velocidad de P forma un ángulo $\theta(t)$ con el eje X.

(a) Suponga que $\theta(t) = \omega t$ y demuestre que la trayectoria es una circunferencia. Determine el radio de ella.

(b) Esta vez suponga que $\theta(t) = \alpha t^2$. Demuestre que en cada instante el producto de la longitud recorrida $s(t)$ por el radio de curvatura $\rho_c(t)$ es una constante C. Determine C.

(c) Haga un dibujo (un bosquejo) de la forma de la trayectoria de P obtenida en el caso (b) y determine el valor del radio de curvatura de la trayectoria cuando la coordenada Y de P alcanza su máximo valor.

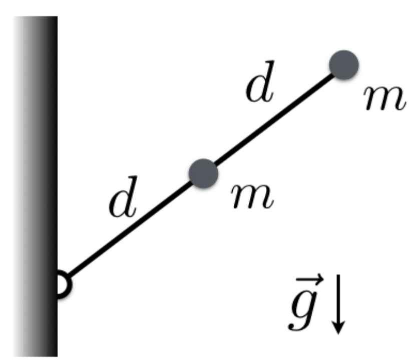
P2: Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie externa de un cono de ángulo α (ver figura). La partícula está unida a una cuerda que pasa por un orificio en el vértice del cono, de donde es recogida con velocidad constante v_0, tal como se indica en la figura. Inicialmente, la partícula está a una distancia L del vértice del cono y gira con velocidad angular ω_0 con respecto al eje del cono.



(a) Determine la distancia al vértice en que la partícula se despega de la superficie del cono.

(b) Calcule la tensión de la cuerda en ese instante.

P3: Dos partículas de masa m están unidas a una barra inextensible sin masa de largo $2d$, tal como indica la figura. La barra puede rotar libremente con respecto a una rótula fija a la pared. Inicialmente, el sistema es soltado desde la posición vertical, con las masas arriba de la rótula.



(a) Encuentre la velocidad angular del sistema en función del ángulo que forma con la vertical.

(b) Calcule la fuerza que ejerce la rótula sobre la barra cuando ésta pasa por la posición horizontal.

Control 1

P1)

a)

$$V_x = V_0\cos(\omega t) \Longrightarrow a_x = -V_0\omega\sin(\omega t)$$
$$V_y = V_0\sin(\omega t) \Longrightarrow a_y = V_0\omega\cos(\omega t)$$

$$\rho_c = \frac{V^3}{\|\vec{v}\times\vec{a}\|} \quad , \quad \vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ V_0\cos(\omega t) & V_0\sin(\omega t) & 0 \\ -V_0\omega\sin(\omega t) & V_0\omega\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}\left(V_0^2\omega\cos^2(\omega t) + V_0^2\omega\sin^2(\omega t)\right) = \hat{k}\,V_0^2\omega$$

$\Rightarrow \|\vec{v}\times\vec{a}\| = V_0^2\omega$ 1pto

$$\|V\| = V_0 \Rightarrow V^3 = V_0^3 \Longrightarrow \rho_c = \frac{V_0^3}{V_0^2\omega} = \frac{V_0}{\omega} = cte$$ 1pto

$\Rightarrow$ la trayectoria es circular

b) $s = \|r\| = \int_0^t \|V\|dt = \int_0^t V_0\,dt = V_0 t$ 0.5 ptos

$$V_x = V_0\cos(\alpha t^2) \Longrightarrow a_x = -2\alpha t V_0\sin(\alpha t^2)$$
$$V_y = V_0\sin(\alpha t^2) \Longrightarrow a_y = 2\alpha t V_0\cos(\alpha t^2)$$

$$\boxed{\rho_c = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\theta}}$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ V_0\cos(\alpha t^2) & V_0\sin(\alpha t^2) & 0 \\ -2\alpha t V_0\sin(\alpha t^2) & 2\alpha t V_0\cos(\alpha t^2) & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(2\alpha t V_0^2\cos^2(\alpha t^2) + 2\alpha t V_0^2\sin^2(\alpha t^2)\right)$$

$$= \hat{k}\,2\alpha t V_0^2$$

$$\|\vec{v}\times\vec{a}\| = 2\alpha t V_0^2$$

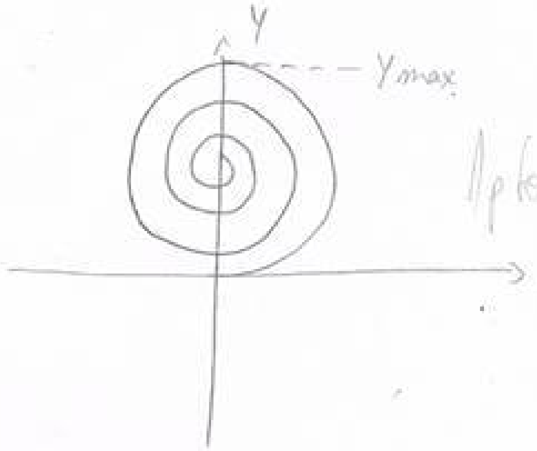
$$\Rightarrow \rho_c = \frac{V_0^3}{2\alpha t V_0^2} = \frac{V_0}{2\alpha t} \Rightarrow \boxed{s \cdot \rho_c = V_0 t \cdot \frac{V_0}{2\alpha t} = \frac{V_0^2}{2\alpha} = cte}$$

1 pto

0,5 pto

c) Vemos que si $t=0$ el radio de curvatura es $\infty \to$ una recta y a medida que pasa el tiempo este disminuye. Además, por la forma de las velocidades se ve que la trayectoria es más o menos "circular"

$\rho_c(t \to \infty) = 0$



1 pto (parte del puntaje va por entender la trayectoria)

Se tiene Y_{max} para la primera vez que $V_y = 0$ con $t \neq 0$

$$\Rightarrow V_0 \sin(\alpha t^2) = 0 \Rightarrow \alpha t^2 = n\pi \to t = \sqrt{\frac{n\pi}{\alpha}}, \text{ si } n = 1$$

$n \in \mathbb{Z}^+$

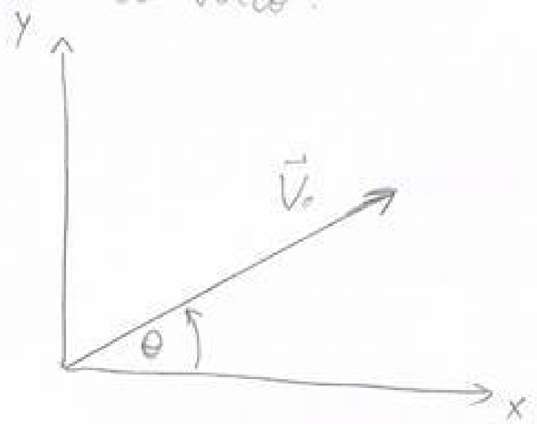
0,5 ptos

obtenemos el tiempo deseado $\Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_c(t^*) = \frac{V_0}{2\sqrt{\pi\alpha}}}$$ 0,5 ptos

Otra forma de verlo:

a)



$V_x = V_0 \cos\theta = V_0 \cos(\omega t)$

$V_y = V_0 \sin\theta = V_0 \sin(\omega t)$

$x = \int_0^t V_x \, dt = \int_0^t V_0 \cos(\omega t) = V_0 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^t = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$ 0,7 ptos

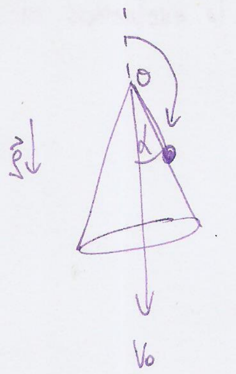
$y = \int_0^t V_y \, dt = \int_0^t V_0 \sin(\omega t) = -V_0 \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \Big|_0^t = \frac{V_0}{\omega} - \frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t)$ 0,7 ptos

$\tilde{x} = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) = x \,, \quad \tilde{y} = \frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t) = \frac{V_0}{\omega} - y$

$\Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{V_0}{\omega} - y\right)^2$ 0,3 ptos ecuación de una circunferencia de centro $\left(0, \frac{V_0}{\omega}\right)$

$\boxed{R = \frac{V_0}{\omega}}$ 0,3 ptos

P2

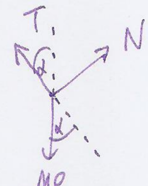


a) Consideremos un sistema de coordenadas esférico con origen en el vértice del cono. De este modo: $\dot{\phi}(0)=\omega_0$ y $r(0)=L$.

Dado que la partícula es recogida con velocidad V_0 hacia el centro, se tiene que la distancia r disminuye a una tasa V_0.

$$\Rightarrow \dot{r}=-V_0 \Rightarrow \ddot{r}=0$$

Haciendo un DCL:



(1 pto)

con T la tensión de la cuerda y N la normal.

Luego, la fuerza que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F}=(mg\cos\alpha - T)\hat{r} + (mg\sin\alpha - N)\hat{\theta}$$

Dado que el ángulo θ es constante e igual a $\theta=\pi-\alpha \Rightarrow \dot{\theta}=\ddot{\theta}=0$. Además:

$$\cos\theta=\cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos(-\alpha)-\cancelto{0}{\sin\pi}\sin(-\alpha)=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$\sin\theta=\sin(\pi-\alpha)=\cancelto{0}{\sin\pi}\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)\cos\pi=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$$

Luego:

$$\ddot{\vec{r}}=(\cancelto{0}{\ddot{r}}-r\cancelto{0}{\dot{\theta}}^2-r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r}+(r\cancelto{0}{\ddot{\theta}}+2\dot{r}\cancelto{0}{\dot{\theta}}-r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta}+\frac{(r^2\dot{\phi}\sin^2\theta)'}{r\sin\theta}\hat{\phi}$$

$$=-r\dot{\phi}^2\sin^2\alpha\,\hat{r}+r\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{\theta}+\frac{(r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha)'}{r\sin\alpha}\hat{\phi}$$

Haciendo uso de la segunda ley de Newton, $m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$, se tiene:

$\hat{r})$: $mg\cos\alpha - T = -mr\dot{\phi}^2\sin^2\alpha$ (1)

$\hat{\theta})$: $mg\sin\alpha - N = mr\dot{\phi}^2\sin\alpha\cos\alpha$ (2) (1 pto.)

$\hat{\phi})$: $0=\frac{m}{r\sin\alpha}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha)$ (3)

De (3): $r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha = k = cte$. Dado que esto se cumple para todo tiempo, lo evaluamos en $t=0$

$$\Rightarrow \quad r^2(0)\dot{\phi}(0)\sin^2\alpha = k$$

$$\Rightarrow \quad L^2\omega_0\sin^2\alpha = k$$

Entonces: $r^2\dot{\phi}\sin^2\alpha = L^2\omega_0\sin^2\alpha \rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L^2\omega_0}{r^2}}$ (1 pto.)

Reemplazando en (2):

$$mg\sin\alpha - N = mr\left(\frac{L^4\omega_0^2}{r^4}\right)\sin\alpha\cos\alpha$$

En el momento del despegue $N=0$, luego, la distancia r_D a la que despega es:

$$mg\sin\alpha = \frac{mL^4\omega_0^2}{r^3}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{L^4\omega_0^2\cos\alpha}{g}\right)^{1/3} \quad (1 \text{ pto.})$$

b) Reemplazando $\dot{\phi}$ en (1):

$$-T + mg\cos\alpha = -mr\left(\frac{L^4\omega_0^2}{r^4}\right)\sin^2\alpha$$

$$T = mg\cos\alpha + \frac{mL^4\omega_0^2}{r^3}\sin^2\alpha \quad (1 \text{ pto.})$$

Y evaluando en $r = r_D$ se tiene la tensión en el instante del despegue:

$$T = mg\cos\alpha + \frac{mg\,L^4\omega_0^2\sin^2\alpha}{L^4\omega_0^2\cos\alpha} = mg\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

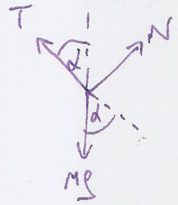
$$= \frac{mg}{\cos\alpha}\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = \frac{mg}{\cos\alpha} \quad (1 \text{ pto.})$$

P2

a) Ubicamos un sistema de coordenadas cilíndrico con origen en el vértice del cono. De este modo: $\dot{\phi}(0) = \omega_0$ y $\rho(0) = L\sin\alpha$.

Tenemos:

DCL:

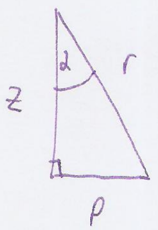


(1 pto.)

Con T la tensión y N la normal.

La fuerza sobre la partícula es:

$$\vec{F} = (N\cos\alpha - T\sin\alpha)\hat{\rho} + (T\cos\alpha + N\sin\alpha - mg)\hat{z}$$



Vemos que se cumple:

$$z = r\cos\alpha$$

$$\rho = r\sin\alpha$$

Dado que la partícula es recogida a una tasa V_0: $\dot{r} = -V_0$

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = -V_0\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{\rho} = -V_0\sin\alpha \qquad\qquad \ddot{\rho} = 0$$

Luego:

$$\ddot{\vec{r}} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k} = -\rho\dot{\phi}^2\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}$$

Entonces, con $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ tenemos:

$$\hat{\rho}: \quad -m\rho\dot{\phi}^2 = N\cos\alpha - T\sin\alpha \qquad (1)$$

$$\hat{\phi}: \quad m(2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) = 0 \qquad (2)$$

$$\hat{z}: \quad 0 = T\cos\alpha + N\sin\alpha - mg \qquad (3)$$

(1 pto.)

Multiplicamos (2) por ρ:

$$2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

Es decir: $\rho^2\dot{\phi} = k = cte.$

Evaluando en $t=0$ se tiene $k = \rho^2(0)\,\dot{\phi}(0) = L^2 \sin^2\alpha\, \omega_0$. Luego: $\dot{\phi} = \frac{k}{\rho^2} = \frac{L^2 \sin^2\alpha\, \omega_0}{\rho^2}$ (1 pto.)

Reemplazando en (1):

$$-m\rho\left(\frac{L^4 \sin^4\alpha\, \omega_0^2}{\rho^4}\right) = N\cos\alpha - T\sin\alpha \qquad (*)$$

En el momento del despegue $N=0$, luego (3):

b)

$$0 = T\cos\alpha - mg \Rightarrow \boxed{T = \frac{mg}{\cos\alpha}}$$ (2 ptos.) ← Tensión en el momento del despegue.

Reemplazamos esta expresión en (*) con $N=0$. Luego:

$$-m\rho_D\left(\frac{L^4 \sin^4\alpha\, \omega_0^2}{\rho_D^4}\right) = -\frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\rho_D^3 = \frac{L^4 \sin^3\alpha\, \omega_0^2 \cos\alpha}{g}$$

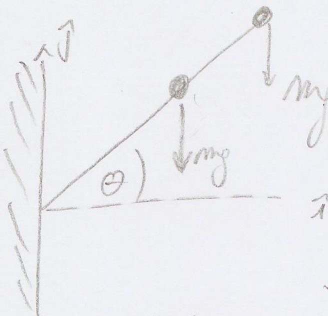
$$\Rightarrow \rho_D = \left(\frac{L^4 \omega_0^2 \cos\alpha}{g}\right)^{1/3} \sin\alpha$$

Sin embargo la distancia al vértice en el momento del despegue es:

$$r_D = \frac{\rho_D}{\sin\alpha} = \left(\frac{L^4 \omega_0^2 \cos\alpha}{g}\right)^{1/3}$$ (1 pto.)

P3] $\vec{L}_0 = \vec{L}_0^{\,G} + \cancel{\vec{L}_G}^{\,0}$

a) $\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}_0^{\,G} + \cancel{\vec{\tau}_G}^{\,0}$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{(m\,d\cos\theta\,\hat{\imath} + m\,d\sin\theta\,\hat{\jmath}) + (m\,2d\cos\theta\,\hat{\imath} + m\,2d\sin\theta\,\hat{\jmath})}{2m} = \frac{3d}{2}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$

0,5 ptos

$$\vec{V}_{cm} = \frac{3d}{2}(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\dot{\theta}$$ 0,5 ptos

$$\vec{a}_{cm} = \frac{3d}{2}(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})\ddot{\theta} - \frac{3d}{3}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})\dot{\theta}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_{cm} \times 2m\vec{V}_{cm} = \frac{9d^2}{4}2m(\cos\theta^2 + \sin\theta^2)\dot{\theta}\hat{k} = \frac{9d^2}{2}m\dot{\theta}$$ 1 pto

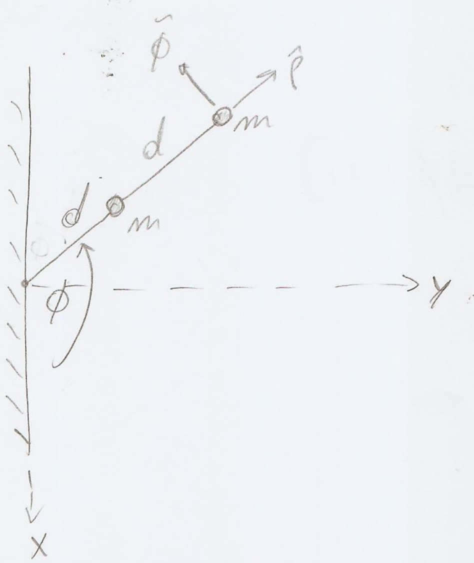
$$\vec{\tau}_0 = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times (-2mg\,\hat{\jmath}) = -3d\,mg\cos\theta$$ 1 pto

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_0 = \vec{\tau}_0 \Rightarrow \frac{\cancel{9}^{3}d^{\cancel{2}}}{2}\cancel{m}\ddot{\theta} = -\cancel{3d}\,\cancel{m}g\cos\theta \Rightarrow \frac{3d\ddot{\theta}}{2} = -g\cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = \left(-\frac{2}{3}\frac{g}{d}\cos\theta\right) \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{2g}{3d}\int_{\pi/2}^{\theta}\cos\theta\,d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{2g}{3d}(\sin\theta - 1) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{4g}{3d}(1 - \sin\theta)}}$$ 1 pto

P3)



Coordenadas polares

a) Primero obtenemos el centro de masa:

$$\vec{r}_G = \frac{3}{2} d\hat{\rho} \rightarrow \vec{v}_G = \frac{3}{2} d\dot{\phi}\hat{\phi} \rightarrow \vec{a}_G = \frac{3}{2} d(-\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{\phi}\hat{\phi})$$ 1pto

Usaremos $\vec{F}_{ext} = m_{total} \cdot \vec{a}_G$

La fuerza de la rótula es: $\vec{N} = N\hat{\rho}$

$\Rightarrow \hat{\rho}) \; 2mg\cos\phi + N = -\frac{3}{2} d2m\dot{\phi}^2$ 1pto

$\hat{\phi}) \; -2mg\sin\phi = \frac{3}{2} d2m\ddot{\phi} \rightarrow \ddot{\phi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{d}\sin\phi$

1pto $\dot{\phi}\, d\dot{\phi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{d}\sin\phi\, d\phi$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2}\Big|_0^{\dot{\phi}} = \frac{2}{3}\frac{g}{d}\cos\phi\Big|_{\phi_0=\pi}^{\phi}$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{g}{d}(\cos\phi + 1) \Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \sqrt{\frac{4}{3}\frac{g}{d}(\cos\phi+1)}}$$ 1pto

b) de $\hat{\rho}$) despejamos N

$$N = -2m\left(g\cos\phi + \frac{3}{2}d\dot{\phi}^2\right) = -2m\left[g\cos\phi + 2g(\cos\phi + 1)\right]$$

$$N = -mg(6\cos\phi + 4)$$ 1 pto

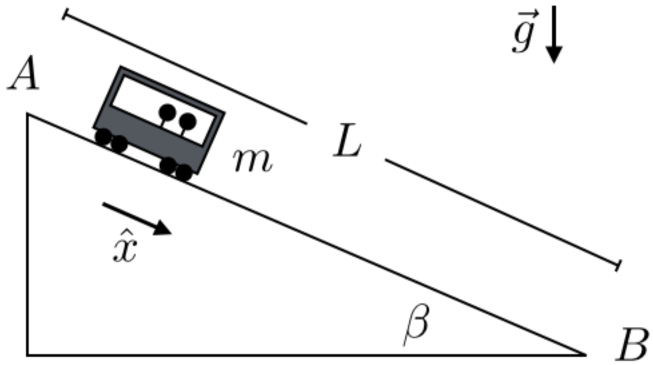
Pasa por la horizontal en $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{|N| = 4mg}$$ // 1 pto

FI-2001 Mecánica - Sección-3
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Ernesto Berrios y Tomás Muller
FCFM, Universidad de Chile

Control 2
Miércoles 7 de mayo, 2014
Tiempo: 3horas

P1: Un funicular de masa m desciende desde el extremo superior de un plano inclinado de largo L (punto A en la figura) hasta su extremo inferior (punto B). El plano forma un ángulo β con la horizontal. Debido a la acción de un motor, la posición del funicular está dada por $x(t) = L\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ donde T es una constante conocida y $t = 0$ corresponde al momento inicial cuando el funicular está en A.



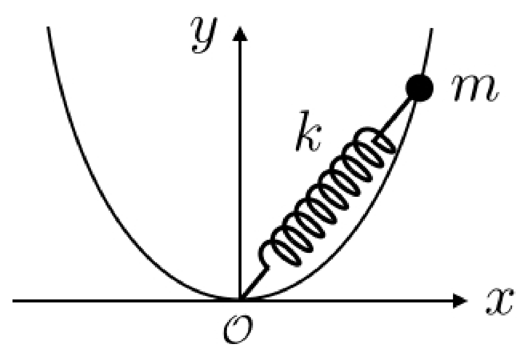
(a) Encuentre el trabajo total realizado sobre el funicular desde A a B.

(b) Si además del peso, la normal, y la fuerza del motor, también actúa una fuerza de roce viscoso, $-c\vec{v}$, donde c es una constante positiva conocida, encuentre el trabajo realizado por la fuerza de roce viscoso.

(c) Determine el trabajo realizado por el motor.

P2: Un anillo de masa m puede deslizar sin roce por un alambre dado por $y = x^2/x_0$ (ver figura). El anillo está unido a un resorte ideal de constante k, largo natural cero, y sujeto al punto $\mathcal{O}$. Además de la fuerza del resorte $\vec{F}_R$ y de la fuerza ejercida por el alambre $\vec{F}_A$, sobre el anillo actúa una fuerza externa

$$\vec{F}_E = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{x} + \frac{3x_0}{4}y\hat{y}\right). \tag{1}$$

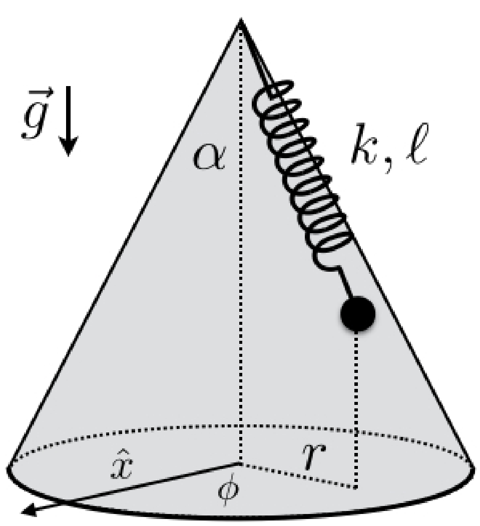


(a) Identifique cuáles de estas fuerzas realizan trabajo. Justifique su respuesta.

(b) Encuentre el trabajo total que se realiza sobre el anillo cuando éste se mueve desde $x = x_0$ hasta $x = \lambda x_0$, con λ arbitrario.

(c) Encuentre todos los puntos en que el anillo posee la misma rapidez que la que tiene al pasar por el punto $x = x_0$.

P3: Una partícula de masa m está restringida a deslizar sobre la superficie de un cono de ángulo α. Esta permanece unida al vértice del cono a través de un resorte de constante k y de largo natural ℓ tal como indica la figura. La partícula también está sometida a la fuerza de gravedad.



(a) Determine el Lagrangiano $L = K - U$ del sistema en función de r, $\dot{r}$, ϕ y $\dot{\phi}$ donde r es la distancia de la partícula al eje del cono, y ϕ es el ángulo relativo al eje x (ver figura).

(b) Deduzca las dos ecuaciones de Eüler-Lagrange relacionadas con r y ϕ. Reduzca las ecuaciones a una sola ecuación para r.

(c) Integre la ecuación obtenida en la parte (b) una vez, y deduzca a partir de este resultado que $E = K + U$ es constante.

P1) Hay varios formas de hacer la parte a). Veamos

1°) $W_{tot} = K_f - K_i$, $\dot{x}(t) = \frac{\pi L}{2T} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$ 0,5 ptos

$K_i = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(0) = \frac{m\pi^2 L^2}{8T^2}$ 1 pts

$K_f = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(T) = 0$ 1 pts en $t = T$, $x(T) = L$ (punto B)

$\Rightarrow \boxed{W_{tot} = -\frac{m\pi^2 L^2}{8T^2}}$ 0,5 ptos

2°) $W_{tot} = W_{FC} + W_{FNC}$

En W_{FC} solo está el peso $\Rightarrow W_g = -(U_B - U_A)$

$U_A = mgL\sin\beta$, $U_B = 0 \Rightarrow W_{FC} = W_g = U_A = mgL\sin\beta$ 1 pto por W_{FC}

$W_{FNC} = E_f - E_i$

$\Rightarrow E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2} m \frac{\pi^2 L^2}{4T^2} + mgL\sin\beta$

$E_f = K_f + U_f = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow W_{FNC} = -\frac{m\pi^2 L^2}{8T^2} - mgL\sin\beta$ 1 pto por W_{FNC}

$\Rightarrow W_{FC} + W_{FNC} = \cancel{mgL\sin\beta} - \frac{m\pi^2 L^2}{8T^2} - \cancel{mgL\sin\beta}$

$\Rightarrow \boxed{W_{tot} = -\frac{m\pi^2 L^2}{8T^2}}$ 0,5 ptos

0,5 ptos por $\dot{x}(t) = \frac{\pi L}{2T} \cos\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$

Hay variaciones de esto para llegar al resultado correcto

b) $F_r = -c\vec{v} \Rightarrow W_{F_r} = \int_0^T -c\vec{v}\cdot\vec{v}\cdot dt = -c\int_0^T \left(\frac{\pi L}{2T}\right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)dt$ 1 pto por expresar la integral

$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2} \Rightarrow W_{F_r} = -\frac{c}{2}\left(\frac{\pi L}{2T}\right)^2\left[\int_0^T \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt + \int_0^T dt\right]$

$W_{F_r} = -\frac{c}{2}\left(\frac{\pi L}{2T}\right)^2 \cdot \left[\cancel{\frac{T}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\Big|_0^T}^{\,0} + t\Big|_0^T\right]$

$\Rightarrow \boxed{W_{F_r} = -\frac{c\pi^2 L^2}{8T}}$ 1 pto

c) $W_{FNC} = E_f - E_i$, $W_{FNC} = W_{motor} + W_{F_r}$

$E_i = \frac{m\pi^2 L^2}{8T^2} + mgL\sin\beta$, $E_f = 0$ 0,5 ptos por E_i y E_f (o W_{FNC})

$\Rightarrow W_{motor} = E_f - E_i - W_{F_r} = \boxed{-\frac{m\pi^2 L^2}{8T^2} - mgL\sin\beta + \frac{c\pi^2 L^2}{8T} = W_{motor}}$ 0,5 ptos

Lamentablemente el profesor me dijo que <u>sí</u> considerara W_{F_r} para la parte c) y al Ernesto le dijo que <u>no</u> lo considerara. Por este motivo a ambos métodos se les corregirá de forma separada, no se preocupen.

P2

(a) $\vec{F}_A$ corresponde a la fuerza normal que el alambre ejerce sobre la partícula. Como es perpendicular al desplazamiento, $\vec{F}_A \cdot d\vec{r} = 0$ y por lo tanto $W_{F_A} = 0$ (0,5 ptos.)

$\vec{F}_R$ apunta hacia el centro, es decir, no es normal al desplazamiento sobre el alambre y entonces sí realiza trabajo (0,5 ptos.)

Notemos que:

$$\vec{F}_E \cdot d\vec{r} = \frac{k}{x_0}\left(xy\hat{x} + \frac{3x_0}{4}y\hat{y}\right)\cdot(dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y}) = \frac{k}{x_0}\left(xy\,dx + \frac{3x_0}{4}y\,dy\right)$$

$$\left(dy = \frac{2x}{x_0}dx\right) \quad = \frac{k}{x_0}\left(\frac{x^3}{x_0}dx + \frac{3x_0}{4}\frac{x^2}{x_0}\frac{2x}{x_0}dx\right) = \frac{k}{x_0^2}x^3dx\left(1 + \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{2}\frac{k}{x_0^2}x^3\,dx$$

Es decir $\vec{F}_E$ es perpendicular al alambre sólo en el origen y por lo tanto sí realiza trabajo (0,5 ptos).

(b) $W_{total} = W_{F_E} + W_{F_R}$ (0,5 ptos.)

Como $\vec{F}_R$ es conservativa podemos asociarle un potencial U.

$$l_0 = 0 \Rightarrow U = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2+y^2) = \frac{1}{2}k\left(x^2 + \frac{x^4}{x_0^2}\right) = \frac{1}{2}kx^2\left(1 + \frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

Luego $W_{F_R} = -\left(U(\lambda x_0) - U(x_0)\right) = U(x_0) - U(\lambda x_0)$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2\cdot 2 - \frac{1}{2}k\lambda^2x_0^2(1+\lambda^2) = kx_0^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{2}\right) \quad (1\ \text{pto.})$$

Por otro lado:

$$W_{F_E} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{F}_E\cdot d\vec{r} \overset{(a)}{=} \int_{x_0}^{\lambda x_0}\frac{5k}{2x_0^2}x^3\,dx = \frac{5k}{2x_0^2}\left(\left.\frac{x^4}{4}\right|_{x_0}^{\lambda x_0}\right) = \frac{5k}{8x_0^2}\left(\lambda^4x_0^4 - x_0^4\right)$$

$$= \frac{5}{8} k\lambda_0^2 (\lambda^4 - 1) \qquad (1 \text{ pto.})$$

Entonces:

$$W_{Total}(x_0 \to \lambda x_0) = k\lambda_0^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{2} \right) + \frac{5}{8} k\lambda_0^2 (\lambda^4 - 1)$$

$$= k\lambda_0^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{2} + \frac{5}{8}\lambda^4 - \frac{5}{8} \right) = \frac{k\lambda_0^2}{8} \left(\lambda^4 - 4\lambda^2 + 3 \right)$$

$$= \frac{k\lambda_0^2}{8} (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 3) = \frac{k\lambda_0^2}{8} (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+\sqrt{3})(\lambda-\sqrt{3})$$

(c) Se tiene $W_{Total}(x_0 \to \lambda x_0) = K(\lambda x_0) - K(x_0)$.

Dado que buscamos los puntos tales que tengan la misma rapidez que en $x = x_0$, es decir, misma energía cinética, basta con encontrar aquellos λ tales que $W_{Total}(x_0 \to \lambda x_0) = 0$.

(1,5 ptos.)

De (b) es claro que el trabajo se anule en $\lambda = 1, -1, \sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$

Luego, cuando $x = x_0, -x_0, \sqrt{3}x_0$ y $-\sqrt{3}x_0$ la partícula tiene la misma rapidez.

(0,5 ptos.)

Puntaje:

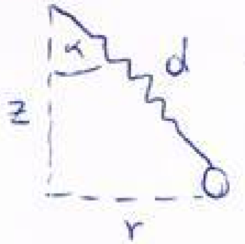
0,5 ⇒ $W_{FA} = 0$
0,5 ⇒ $\vec{F}_E$ realiza trabajo
0,5 ⇒ $\vec{F}_R$ realiza trabajo

Se descuenta -0,2 en cada caso por falta de argumentos.

0,5 ⇒ $W_T = W_{FR} + W_{FE}$
1,0 ⇒ Calcular W_{FR} (No importa si es con U o no)
1,0 ⇒ Calcular W_{FE}.
1,5 ⇒ Explicar cómo obtener puntos con igual rapidez que $x = x_0$.
0,5 ⇒ Obtener estos puntos (se considera todo el puntaje si hubieran errores de cálculo)

P3] $L = K - U$

a) $\Rightarrow K = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 \right]$ 1 pto , $U = -mgz + \frac{k}{2}(d-\ell)^2$ 1 pto



$\rightarrow \boxed{d = \frac{r}{\sin\alpha}} \rightarrow \boxed{z = \frac{r}{\tan\alpha}}$

$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha} \right]$

$\Rightarrow U = -mg\frac{r}{\tan\alpha} + \frac{k}{2}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)^2$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \left[\dot{r}^2\left(1 + \frac{1}{\tan^2\alpha}\right) + r^2\dot{\phi}^2 \right] + mg\frac{r}{\tan\alpha} - \frac{k}{2}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)^2}$$ 0,5 ptos

(E-L)

b) $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}A$, con $A = \left(1 + \frac{1}{\tan\alpha}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}A$

r]

$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 + \frac{mg}{\tan\alpha} - \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \boxed{m\ddot{r}A - mr\dot{\phi}^2 - \frac{mg}{\tan\alpha} + \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right) = 0}$$ 1 pto

(*)

ϕ] $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi}$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \boxed{mr^2\ddot{\phi} = 0}$ 0,5 ptos

$+ 2mr\dot{r}\dot{\phi}$

$\Rightarrow mr^2\dot{\phi} = cte = L$ (momento angular)

+0,3 ptos extras por identificar L!!!

$\Rightarrow \boxed{\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}}$ (**)

$$\Rightarrow (**) \text{ en } (*) : \boxed{m\ddot{r}A = \frac{L^2}{mr^3} + \frac{mg}{\tan\alpha} - \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)}$$ 0,5 ptos

c) $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}$

$$\Rightarrow \int A m \dot{r} d\dot{r} = \int \left[\frac{L^2}{mr^3} + \frac{mg}{\tan\alpha} - \frac{k}{\sin\alpha}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)\right] dr$$ (primitiva) 0,5 ptos

$$A m \frac{\dot{r}^2}{2} = -\frac{L^2}{2mr^2} + \frac{mgr}{\tan\alpha} - \frac{k}{2}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)^2 + E$$, con $E = cte$

0,5 ptos por la cte

$$\left[A m \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2}\right] + \left[-mg\frac{r}{\tan\alpha} + \frac{k}{2}\left(\frac{r}{\sin\alpha} - \ell\right)^2\right] = E$$

recordar que $L = \dot{\phi} m r^2$, $A = 1 + \frac{1}{\tan\alpha}$, $z = \frac{r}{\tan}$ y $d = \frac{r}{\sin\alpha}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2\right]}_{K} + \underbrace{\left[-mgz + \frac{k}{2}(d-\ell)^2\right]}_{U} = E$$

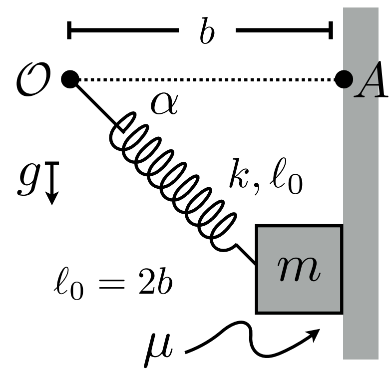
$$\boxed{K + U = E}$$ 0,5 ptos

con $E = cte$

FI-2001 Mecánica - Sección-6
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Jonathan Monsalve & Fabián Sepúlveda
FCFM, Universidad de Chile

Control 2
Miércoles 6 de mayo, 2015
Tiempo: 3horas

P1: Una partícula de masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. El otro extremo está fijo en el punto $\mathcal{O}$, tal como lo muestra la figura. La distancia entre $\mathcal{O}$ y la pared es b (distancia $\mathcal{O}A$) y el largo natural del resorte es $\ell_0 = 2b$. Entre la partícula y la pared existe un roce caracterizado por el coeficiente μ (cinético y estático). Considere que $k = 2mg/b$.

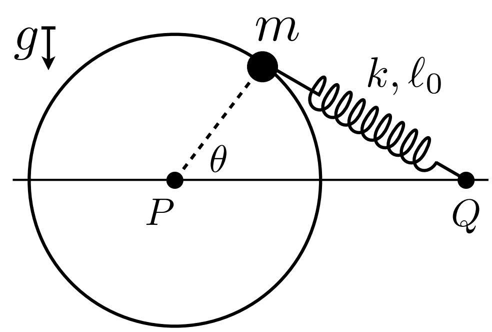


(a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que al dejar la partícula en reposo en el punto A, ésta comience a descender?

(b) Si μ cumple la condición de (a) y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α. Indique el ángulo α en que la partícula se separa de la pared.

(c) Para el caso (b), determine la energía cinética de la partícula en el instante en que ella se separa de la pared.

P2: Una vara ideal de largo R puede girar libremente en torno a su extremo P mientras en su otro extremo tiene una partícula de masa m. Esta última está ligada mediante un resorte ideal a un punto fijo Q ubicado a una distancia $2R$ a la derecha de P. Todo el sistema se encuentra en un mismo plano vertical.



(a) Determine el largo natural del resorte ℓ_0, si se observa que $\theta_1 = 90°$ es un equilibrio del sistema.

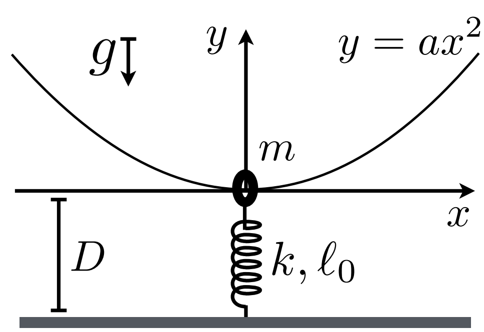
(b) Determinar la constante elástica del resorte, k, si $\theta_2 = 60°$ es también un equilibrio.

(c) Determine los tipos de equilibrio en θ_1 y θ_2. Para el equilibrio estable determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a él.

(d) Indique si espera que exista uno o más equilibrios adicionales en el sistema, señalando su ubicación aproximada y tipo. Justifique claramente su respuesta con argumentos físicos y/o matemáticos.

Indicación: Considere que la fuerza ejercida por la vara tiene siempre la dirección de ésta. Datos del problema: g, R, m. Considere que $\sqrt{5} \sim 2.2$ y $\sqrt{3} \sim 1.7$.

P3: Considere un alambre que describe una curva parabólica del tipo $y = ax^2$ en un plano vertical. Un anillo de masa m desliza con roce despreciable por el alambre, unido a un resorte de largo ℓ_0 y constante elástica k. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un punto fijo localizado a una distancia D del punto $(0, 0)$ del sistema de coordenadas (x, y) (ver figura). Asuma $a = 1/\ell_0$ y $D = 2\ell_0$.



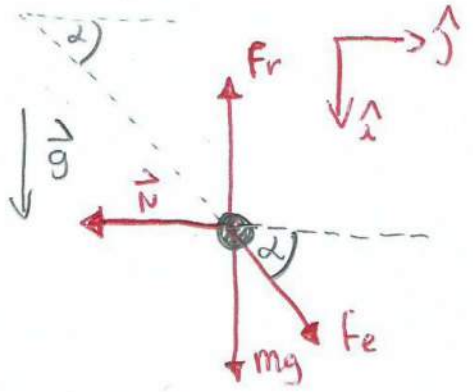
(a) Si el anillo se encuentra inicialmente en el punto más bajo de la parábola, determine la velocidad v_0 con que se le debe impulsar para que alcance una altura D sobre la posición inicial.

(b) Demuestre que el punto $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

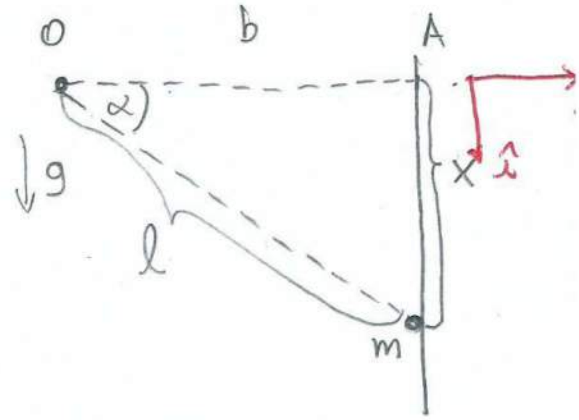
(c) Determine el periodo de las pequeñas oscilaciones del anillo alrededor del punto de equilibrio.

P2)

(a) Se realizará un DCL sobre el cuerpo:



GEOMÉTRICAMENTE →



Notar que $l^2 = b^2 + x^2$

$\Rightarrow l = \sqrt{b^2 + x^2}$

$\Rightarrow$ si $l_0 = 2b$ (largo natural)

$\Rightarrow$ la elongación r del resorte está dada por:

$$r = l - l_0 \Rightarrow r = \sqrt{b^2 + x^2} - 2b$$

La expresión de la fuerza elástica se escribe como:

$$fe = -Kr = -K\left(\sqrt{b^2 + x^2} - 2b\right)$$

Finalmente, escrito en forma vectorial:

$$\vec{fe} = fe \,\text{sen}\,\alpha\,\hat{i} + fe\cos\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{fe} = -K\left(\sqrt{b^2+x^2} - 2b\right)\left(\text{sen}\,\alpha\,\hat{i} + \cos\alpha\,\hat{j}\right)$$

En el eje $\hat{j}$: $N - fe\cos\alpha = 0$ → $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}$ → por diagrama geométrico

$$N = fe\cos\alpha = -K\left(\sqrt{b^2+x^2} - 2b\right)\cdot\frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\boxed{N = 2mg\left[\frac{2b}{\sqrt{x^2+b^2}} - 1\right]}$$

P2

(a) (CONT...) $\Rightarrow$ $f_r = \mu N$

$$f_r = \mu 2mg \left[\frac{2b}{\sqrt{x^2+b^2}} - 1\right]$$

EN $(x=0)$ $\Rightarrow$ $f_r = 2mg\mu$

EN EL LÍMITE: $f_r = mg$

$$2mg\mu = mg$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \mu^* = \frac{1}{2}}$$

(b) SABEMOS QUE: $N = 2mg\left[\frac{2b}{\sqrt{x^2+b^2}} - 1\right]$

PERO: $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}$

$$\Rightarrow N = 2mg\left[2\cos\alpha - 1\right]$$

IMPONIENDO $N=0$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_s = \frac{\pi}{3}}$$

(c) POR CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: $\Delta E = W_{NC}$

SE X_F, LA POSICIÓN EN LA CUAL SE DESPEGA LA PARTÍCULA:

P2

(c) EL TRABAJO DE LA FUERZA DE ROCE ESTÁ DADO POR:

$$W_{NC} = \int_0^{x_F} \vec{f_r} \cdot d\vec{x} \qquad \vec{f_r} = -\mu^* N \hat{\imath} = $$
$$d\vec{x} = dx\,\hat{\imath}$$

$$W_{NC} = \int_0^{x_F} -\mu^* N \hat{\imath} \cdot dx\,\hat{\imath} = -\mu^* \int_0^{x_f} N\,dx$$

$$= -\mu^* \int_0^{x_F} 2mg\left[\frac{2b}{\sqrt{x^2+b^2}} - 1\right] dx$$

$$= -\mu^* 2mg \int_0^{x_F} \left[2\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{b}\right)^2}} - 1\right] dx$$

$\mu^* = 1/2$

$$= -mg\left[2b\,\text{arcsenh}\left(\frac{x}{b}\right) - x\right]\Bigg|_0^{x_F}$$

$$= -mgb\left[2\,\text{arcsenh}(\sqrt{3}) - \sqrt{3}\right]$$

⇒ AHORA NOTAR QUE LA FUERZA QUE GENERA EL MOVIMIENTO TIENE UN POTENCIAL ASOCIADO:

$$\vec{F} = F\hat{\imath} = \Big(mg - \underbrace{\frac{2mg}{b}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\left(\sqrt{x^2+b^2} - 2b\right)}_{\text{fe en eje } \hat{\imath}}\Big)\hat{\imath}$$

$$F\hat{\imath} = \left(mg - \frac{2mg}{b}x + 4mg\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)\hat{\imath}$$

Así $\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow U(x) = -mg\left(x - \frac{x^2}{b} + 4\sqrt{x^2+b^2}\right) + \text{cte}$

P2)

(c) (CONT)

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U$$

$$\Delta K = K_f$$

$x = \sqrt{3}\, b$ CUANDO LA PARTÍCULA SE DETIENE EN $\alpha = \alpha_s = \frac{\pi}{3}$

$$\Delta U = U(\sqrt{3}\, b) - U(0)$$

$$\Delta U = -mg\left(\sqrt{3}\, b - 3b + 4\cdot 2b - 4b\right)$$

$$= -mgb\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

$$K_f = mgb(\sqrt{3}+1) - mgb\left(2\operatorname{arcsenh}(\sqrt{3}) - \sqrt{3}\right)$$

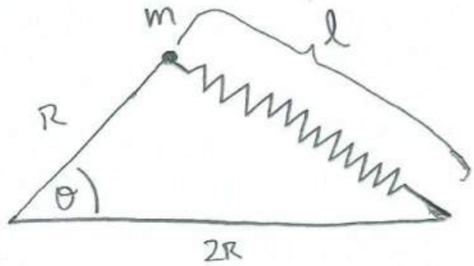
$$K_f = mgb\left(2\sqrt{3} + 1 - 2\operatorname{arcsenh}(\sqrt{3})\right)$$

$\Rightarrow$ CON LO QUE: $\boxed{\dot{x}_f = \left(2gb\left(2\sqrt{3} + 1 - 2\operatorname{arcsenh}(\sqrt{3})\right)\right)^{1/2}}$

NOTA: TAMBIEN PUEDE SER RESUELTO POR DINÁMICA.-

PAUTA P2C2 – FI2001-6
OTOÑO 2015
AUX: JONATHAN MONSALVE R.

P2 (a) OBSERVANDO LA SIGUIENTE FIGURA:



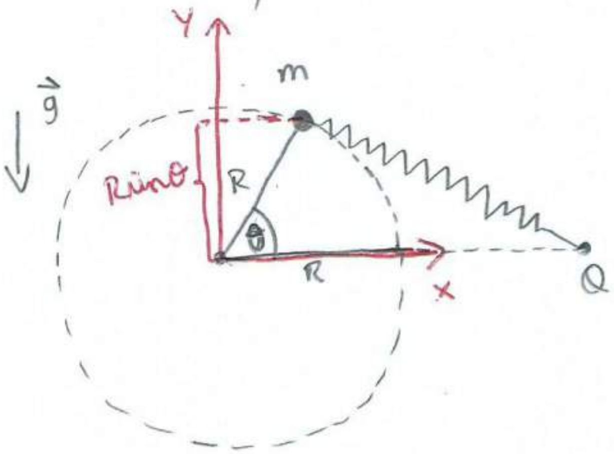
POR TEOREMA DEL COSENO:

$$l^2 = R^2 + 4R^2 - 4R^2\cos\theta$$

$$\Rightarrow l^2 = 5R^2 - 4R^2\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{l = R\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

POR OTRO, DE ACUERDO AL SISTEMA DE REFERENCIA:



LA ALTURA SOBRE EL ORIGEN Y:

$$\boxed{y = R\sin\theta}$$

FINALMENTE, EL POTENCIAL PARA LA PARTÍCULA m SE ESCRIBE COMO:

$$U(\theta) = U_k + U_g$$

$$U(\theta) = \frac{k}{2}(l-l_0)^2 + mgy$$

$$\boxed{U(\theta) = \frac{k}{2}\left(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0\right)^2 + mgR\sin\theta} \quad (1)$$

DERIVANDO $U(\theta)$ C/R A θ, SE OBTIENE:

P1

(a) (CONT...)

$$\frac{\partial U}{d\theta} = \frac{K}{2}\cdot 2\left(R\sqrt{5-4\cos\theta} - l_0\right)\cdot \frac{R}{2}\cdot\frac{4\cdot\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + mgR\cos\theta$$

EVALUANDO EN $\theta = \frac{\pi}{2}$ E IMPONIENDO CONDICIÓN DE EQUILIBRIO:

$$\left.\frac{\partial U}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = K\left(R\sqrt{5} - l_0\right)\cdot R\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2KR\left(R\sqrt{5} - l_0\right)}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l_0 = R\sqrt{5}}$$

(0,5)

(b) EVALUANDO $\left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial\theta} = K\left(R\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}} - l_0\right)\cdot\frac{\cancel{2}R\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\sqrt{5-4\cdot\frac{1}{2}}} + mg\cdot\frac{R}{2} = 0$$

$$\Rightarrow K\left(R\sqrt{3} - l_0\right)\cdot\frac{R\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}} + \frac{mgR}{2} = 0$$

$$mg = 2K\left(l_0 - R\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow K = \frac{mg}{2\left(l_0 - R\sqrt{3}\right)}$$

(0,5)

$$K = \frac{mg}{2\left(R\sqrt{5} - R\sqrt{3}\right)} \longrightarrow \boxed{K = \frac{mg}{R}}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} \approx 0.5$$

P2

(c) RECORDANDO:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{2kR\left(R\sqrt{5-4\cos\theta}-l_0\right)\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + mgR\cos\theta$$

PERO $k = \frac{mg}{R}$ Y $l_0 = R\sqrt{5}$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 2mgR\sin\theta \cdot \frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-\sqrt{5}}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + mgR\cos\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{2mgR\sin\theta\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-\sqrt{5}\right) + mgR\cos\theta\left(\sqrt{5-4\cos\theta}\right)}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR\left(2\sin\theta + \cos\theta - \frac{2\sqrt{5}\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\right)$$

LUEGO: $$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR\left(2\cos\theta - \sin\theta - \left(\frac{2\sqrt{5}\cdot\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + 2\sqrt{5}\sin\theta \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot\sin\theta}{(\sqrt{5-4\cos\theta}\right.\right.$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR\left(2\cos\theta - \sin\theta - \frac{2\sqrt{5}\cos\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}} + \frac{4\sqrt{5}\sin^2\theta}{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}\right)^3}\right)} \quad (1)$$

EVALUANDO: $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$

- $$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR\left(-1 + \frac{4\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^3}\right) = mgR\left(-1+\frac{4}{5}\right) < 0 \quad (0,5)$$

$\Rightarrow$ θ_1 ES EQUILIBRIO INESTABLE

P2

(c) EVALUANDO : $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = mgR\left(2\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{5}\cdot 1/2}{\sqrt{5-4\cdot 1/2}} + \frac{4\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5-4\cdot 1/2}\right)^3}\right)$$

$$= mgR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$= mgR\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} + \cancel{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}\right)$$

(0.5)

$$= mgR\left(1 - \frac{1.7}{2}\right) > 0 \Rightarrow \theta_2 \text{ ES EQUILIBRIO ESTABLE}$$

$\Rightarrow$ PERÍODO PEQUEÑAS OSCILACIONES:

$$U(\theta) \simeq U\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) + \cancel{\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi/3}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}^{\,0} + \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}}_{mgR\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$E = E_k + U$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + U\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) + mgR\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)^2$$

$\Rightarrow$ PERO $v = R\dot{\theta} \rightarrow v^2 = R^2\dot{\theta}^2$

$$E = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + U\left(\theta=\frac{\pi}{3}\right) + mgR\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)^2 \Big/ \cdot\frac{d}{dt}$$

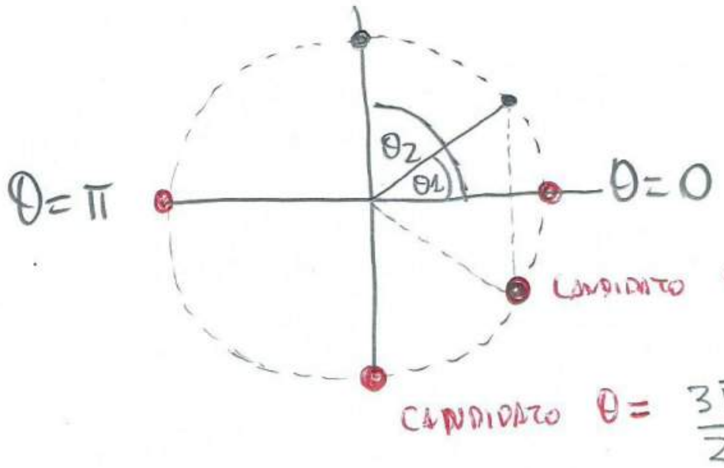
$$0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\dot{\theta} \Big/ \cdot\frac{1}{mR^2\dot{\theta}}$$

(1)

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{R}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{2R}\left(2-\sqrt{3}\right.}$$

P2|

(d) NATURALMENTE Y POR SIMETRÍA SE ESPERAN EQUILIBRIOS PARA LOS PUNTOS SIMÉTRICOS DE $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ Y $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$ C/R AL EJE X:



TAMBIEN PODRÍA PENSARSE QUE $\theta = \pi$ Y $\theta = 0$ SON CANDIDATOS A EQUILIBRIO.-

ANALIZANDO:

- $\theta = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = K\left(R\sqrt{5 - 4 \cdot 1/2} - R\sqrt{5}\right) \cdot \frac{2R \cdot \left(-\sqrt{3}/2\right)}{\sqrt{5 - 4 \cdot 1/2}} + mgR \cdot 1/2$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = K\left(R\sqrt{3} - R\sqrt{5}\right) \cdot \frac{-R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{mgR}{2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mgR\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right) + \frac{mgR}{2} \neq 0$$

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ NO ES EQUILIBRIO

FÍSICAMENTE: COMO EL RESORTE ESTÁ COMPRIMIDO $(l_0 > l)$ Y EL PESO TAMBIEN INTENTA "EMPUJAR EL RESORTE", LA PARTÍCULA m TENDERÁ A CAER PRODUCTO DE AMBAS FUERZAS.-

P2

(d) • $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = K(R\sqrt{5+4} - R\sqrt{3}) \cdot \frac{2R \cdot 0}{\sqrt{5+4}} - mgR \neq 0$$

$\theta = \pi$ NO ES EQUILIBRIO

FÍSICAMENTE: EN $\theta = \pi \rightarrow$ EL PESO mg NO ES EQUILIBRADO POR NINGUNA FUERZA.

• $\theta = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \text{SIMILAR A CASO } \theta = \pi \neq 0$$

$\theta = 0$ NO ES EQUILIBRIO

FÍSICAMENTE: IGUAL AL CASO $\theta = \pi$ (PESO NO SE EQUILIBRA)

• $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = K(R\sqrt{5-0} - R\sqrt{3}) \cdot \frac{2R \cdot (-1)}{\sqrt{5-0}} + 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = K(\underbrace{R\sqrt{3} - R\sqrt{3}}_{\to 0}) \cdot \frac{-2R}{\sqrt{3}} + 0 = 0$$

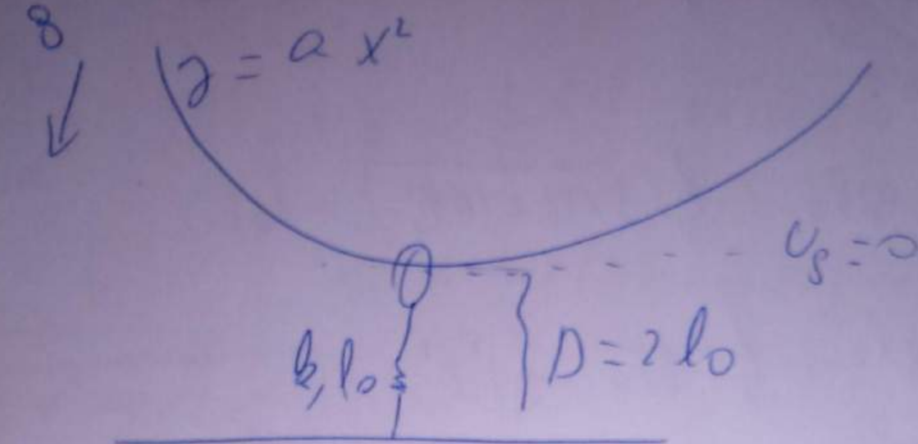
$\Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$ ES EQUILIBRIO.

(1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgR\left(2 \cdot 0 + 1 - 0 + \frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ EQ. ESTABLE}$$

FÍSICAMENTE: EN $\theta = \frac{3\pi}{2} \rightarrow l = l_0$ / NO HAY FZA ELÁSTICA.
LA NORMAL N EQUILIBRA AL PESO mg, Y NO EXISTEN FZAS QUE LO SAQUEN DEL EQUILIBRIO

P3) Pauta C3



$$a = \frac{1}{l_0}$$

$$U(x,z) = +mgz + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+(z+D)^2} - l_0\right)^2$$

$$= +mg a x^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+(ax^2+2l_0)^2} - l_0\right)^2$$

a) $E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(0,0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{4 l_0^2} - l_0\right)^2$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k}{2}(2l_0 - l_0)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{k}{2} l_0^2$$

$E_f = U(t=D)$ $\qquad z = 2l_0 = a x^2 = \frac{1}{l_0} x^2 \quad x = \sqrt{2}\, l_0$

$K_f = 0$, YA que buscamos un v_0

mínimo

$$E_f = + mg2l_0 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{2l_0^2 + 16l_0^2} - l_0\right)^2$$

$$= 2mgl_0 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{18} - 1\right)^2 l_0^2$$

$E_i = E_f$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k l_0^2 = 2mgl_0 + \frac{1}{2} k \left(\left(\sqrt{18} - 1\right)^2\right) l_0^2$$

$$v_0^2 = 4gl_0 + \frac{1}{2} k \left[\left(\sqrt{18} - 1\right)^2 - 1\right] l_0^2$$

b) $U(x) = mgax^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+(ax^2+D)^2} - l_0\right)^2$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x) = 2mgax + \frac{1}{2}k \cdot 2\left(\sqrt{x^2+(ax^2+D)^2} - l_0\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+(ax^2+D)^2}} \cdot \left(2x + 2(ax^2+D)\cdot 2ax\right)$$

$\frac{\partial U}{\partial x}(0) = 0$ $(0,0)$ es pto de eq.

para la condición de 2° orden

Vemos que al agrupar el segundo miembro de la derivada del potencia como

$$\frac{\left(\sqrt{x^2+(ax^2+2l_0)^2} - l_0\right)\left(1+2(ax^2+2l_0)a\right)x}{\sqrt{x^2+(ax^2+2l_0)^2}}$$

usando la regla de la multiplicación y reemplazando en $\dot{x}=0$, sólo cuando se deriva el último miembro da un resultado no trivial.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0,0) = 2mga + \frac{k\,l_0}{2 l_0}(1+2a\cdot 2l_0)$$

$$= 2mga + \frac{5}{2}k > 0$$

$\Rightarrow$ $(0,0)$ es un pto. de equilibrio estable

c) dada la geometría, la ec. de mov. se puede reducir al eje x.

$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}(x)$, tomamos la solución perturvativa $x = \delta + 0$

$$m\ddot{\delta} = -\frac{\partial U}{\partial x}(0+\delta) \simeq -\cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial x}(0)} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0)\,\delta + O(\delta^2)$$

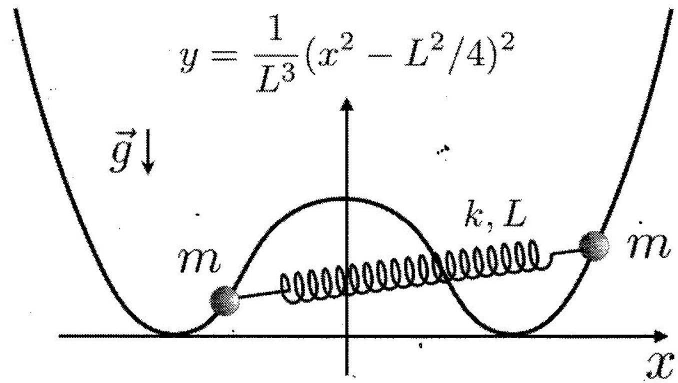
$$\ddot{\delta} = -\frac{1}{m}\left(2mga + \frac{5}{2}k\right)\delta \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{m}\left(2mga + \frac{5}{2}k\right)$$

FI-2001 Mecánica - Sección-3
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Ernesto Berrios y Tomás Müller
FCFM, Universidad de Chile

Control 3

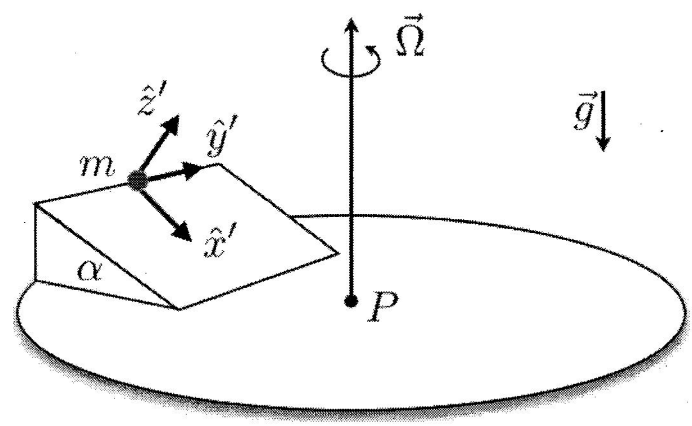
Miércoles 11 de junio, 2014
Tiempo: 3horas

P1: Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k, tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kL/3g$.



(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_\pm = \pm L/2$.
(b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias. Bosqueje el movimiento del sistema representado por cada modo normal.
(c) Si en tiempo $t = 0$ la primera partícula está en reposo en $x_1 = -L/2$ y la segunda cumple $\dot{x}_2 = v_0$ en $x_2 = +L/2$, determine el tiempo T mínimo que le toma al sistema llegar a una configuración donde la segunda partícula se detiene en $x_2 = L/2$, mientras que la primera partícula oscila en torno a $x_1 = -L/2$).

P2: Una cuña de ángulo α respecto de la horizontal se ubica sobre una plataforma que rota con velocidad angular constante Ω respecto de un eje vertical que pasa por un punto P, como muestra la figura. Una partícula de masa m es liberada sobre la cuña partiendo su movimiento desde el reposo relativo a la cuña y su movimiento es descrito con respecto al sistema móvil $S' = \{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ indicado en la figura, cuyo origen se ubica en la posición inicial de la partícula sobre la cuña. Considere en este problema que pueden despreciarse todas las fuerzas inerciales excepto la fuerza de Coriolis. Se pide:



(a) Escribir la ecuación de movimiento de la partícula en sus 3-componentes x', y', z' del sistema de referencia móvil.
(b) Resolver las ecuaciones, encontrando $x'(t)$ e $y'(t)$. Ver indicación de más abajo.
(c) Esquematizar la trayectoria de la partícula sobre la cuña. Determinar el máximo descenso y la máxima rapidez (relativa) de la partícula en su movimiento.

Indicación: La ecuación diferencial $\dddot{u} = A - \omega_0^2 \dot{u}$, con A y ω_0 constantes, tiene por solución general:

$$u(t) = \frac{A}{\omega_0^2} t + C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + C_3,$$

donde las constantes C_1, C_2 y C_3 se determinan según las condiciones iniciales: $u(0)$, $\dot{u}(0)$, $\ddot{u}(0)$. Además, recuerde que en un sistema no inercial S' se cumple:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'.$$

donde $\vec{R}$ es la posición del origen $\mathcal{O}'$, $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular de la triada S', y $\vec{F}$ es la fuerza constatada en un sistema inicial S.

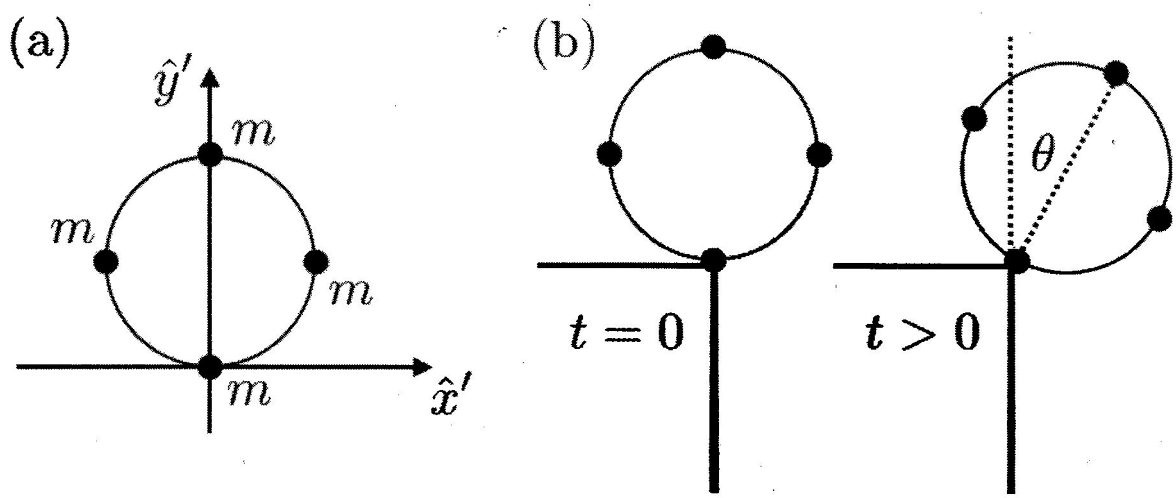
P3: Un aro de radio R y masa despreciable tiene cuatro partículas puntuales, todas de masa m, fijas en extremos opuestas del aro, tal como lo muestra la figura (a). Dicho aro se encuentra en equilibrio apoyado en el borde de una mesa (figura (b)). En $t = 0$, y debido a una pequeña perturbación, el aro empieza a caer girando sobre el borde de la mesa. Determine:

(a) El tensor de inercia en el sistema S' solidario al aro, indicado en la figura (a).

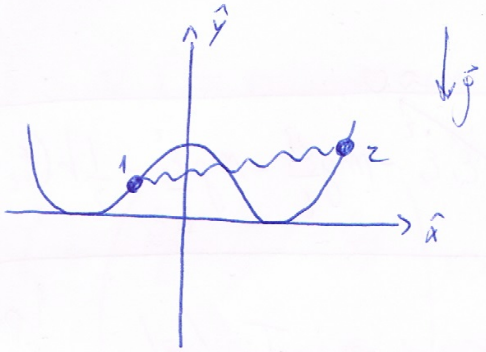
(b) La velocidad angular $\dot{\theta}$ en función del ángulo θ.

(c) La magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el aro en el punto de apoyo, en función de θ.

(d) Si se comprueba experimentalmente que el aro empieza a deslizar sobre el borde de la mesa justo cuando $\theta = 30^o$, determine cuanto vale el coeficiente de roce estático entre el aro y el borde de la mesa.



P1



$$y = \frac{1}{L^3}\left(x^2 - \frac{L^2}{4}\right)^2 = \frac{1}{L^3}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2\left(x + \frac{L}{2}\right)^2$$

L: largo natural

a) Para hacer el cálculo más fácil vamos a hacer las aproximaciones altiro, pero primero veremos la energía cinética y el potencial:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_2^2$$

$$U = mgy_1 + mgy_2 + \frac{1}{2}k\Delta L^2 \quad , (L+\Delta L)^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

Aproximemos:

$$x_1 = -\frac{L}{2} + \varepsilon_1 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{L^3}\left(\left(-\frac{L}{2}+\varepsilon_1\right)-\frac{L}{2}\right)^2\left(\left(-\frac{L}{2}+\varepsilon_1\right)+\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{L^3}(\varepsilon_1 - L)^2\varepsilon_1^2 \underset{(*)}{\approx} \frac{L^2\varepsilon_1^2}{L^3} = \frac{\varepsilon_1^2}{L}$$

$$x_2 = \frac{L}{2} + \varepsilon_2 \Rightarrow y_2 = \frac{\varepsilon_2^2}{L} \text{ (análogo a } y_1)$$

1 pto por las aproximaciones

(*) Solo tomamos hasta ε^2 (orden 2), los de mayor orden se desprecian

$$\Rightarrow \dot{y}_1 \approx \frac{2\varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1}{L} \quad , \quad \dot{y}_2 \approx \frac{2\varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2}{L}$$

$$(y_2-y_1)^2 \approx \left(\frac{\varepsilon_2^2}{L} - \frac{\varepsilon_1^2}{L}\right)^2 \approx 0 \text{ (solo hay términos de orden 4)}$$

$$\Rightarrow (L+\Delta L)^2 = (x_2-x_1)^2 \Rightarrow \Delta L = \left[\left(+\frac{L}{2}+\varepsilon_2\right) - \left(-\frac{L}{2}+\varepsilon_1\right)\right] - L \Rightarrow \Delta L = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

$\Rightarrow L = K - U$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\varepsilon}_2^2 + \underbrace{\cancel{\frac{2m}{L^2}\varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1^2}}_{}^{\approx 0} + \overbrace{\cancel{\frac{2m}{L^2}\varepsilon_2\dot{\varepsilon}_2^2}}^{\approx 0} - mg\frac{\varepsilon_1^2}{L} - mg\frac{\varepsilon_2^2}{L} - \frac{1}{2}k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}$$

1 pto

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_1}\right) = m\ddot{\varepsilon}_1 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_1} = -\frac{2mg\varepsilon_1}{L} + k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_2}\right) = m\ddot{\varepsilon}_2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_2} = -\frac{2mg}{L}\varepsilon_2 - k(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$\varepsilon_1)$ $$m\ddot{\varepsilon}_1 + \frac{2mg}{L}\varepsilon_1 + k\varepsilon_1 - k\varepsilon_2 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_1 + \frac{2g}{L}\varepsilon_1 + \frac{k}{m}\varepsilon_1 - \frac{k}{m}\varepsilon_2 = 0$$

$\varepsilon_2)$ $$m\ddot{\varepsilon}_2 + \frac{2mg}{L}\varepsilon_2 + k\varepsilon_2 - k\varepsilon_1 = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon}_2 + \frac{2g}{L}\varepsilon_2 + \frac{k}{m}\varepsilon_2 - \frac{k}{m}\varepsilon_1 = 0$$, pero $m = \frac{kL}{3g}$ por enunciado

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\ddot{\varepsilon}_1 + \frac{5g}{L}\varepsilon_1 - \frac{3g}{L}\varepsilon_2 = 0 \\ &\ddot{\varepsilon}_2 + \frac{5g}{L}\varepsilon_2 - \frac{3g}{L}\varepsilon_1 = 0 \end{aligned}}$$

1 pto

b) $\ddot{\vec{r}} + \Omega^2 \vec{r} = 0 \Rightarrow \det(\Omega^2 - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$\Rightarrow \Omega^2 = \begin{pmatrix} \frac{5g}{l} & -\frac{3g}{l} \\ -\frac{3g}{l} & \frac{5g}{l} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{5g}{l} - \lambda & -\frac{3g}{l} \\ -\frac{3g}{l} & \frac{5g}{l} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5g}{l} - \lambda\right)^2 - \frac{9g^2}{l^2} = \frac{25g^2}{l^2} - \frac{10g}{l}\lambda + \lambda^2 - \frac{9g^2}{l^2} = \frac{16g^2}{l^2} - \frac{10g}{l}\lambda + \lambda^2$$

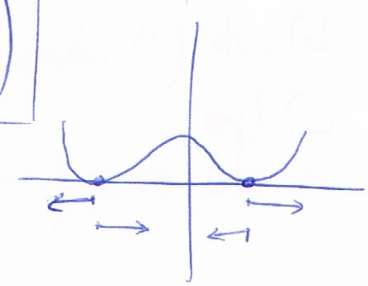
$$\Rightarrow \lambda = \frac{\frac{10g}{l} \pm \sqrt{\frac{100g^2}{l^2} - \frac{64g^2}{l^2}}}{2} = \frac{\frac{10g}{l} \pm \frac{6g}{l}}{2}$$

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{8g}{l} \quad , \lambda_2 = \frac{2g}{l}}$$ 1 pto

$\underline{\lambda_1}$ $$\begin{pmatrix} \frac{5g}{l} - \frac{8g}{l} & -\frac{3g}{l} \\ -\frac{3g}{l} & \frac{5g}{l} - \frac{8g}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{3g}{l} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = -b$$

$$\rightarrow \boxed{a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

0,5 ptos

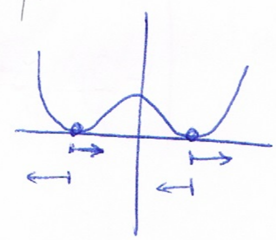


$\lambda_2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{5g}{L}-\frac{2g}{L} & -\frac{3g}{L} \\ -\frac{3g}{L} & \frac{5g}{L}-\frac{2g}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{3g}{L}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\rightarrow \boxed{a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

0,5 ptos



c) Usemos conservación de la energía:

$$E_i = E_f \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}m}V_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}m}\dot{\varepsilon}_1^2$$

$$V_0 = \dot{\varepsilon}_1$$

$$\int_0^T V_0\,dt = \int\left(\frac{d\varepsilon_1}{dt}\right)dt = \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon_1$$

$$\Rightarrow V_0 T = \varepsilon_1 \rightarrow T = \frac{\varepsilon_1}{V_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{x_1 + L/2}{V_0}}$$

1 pto

a) 3 ptos

b) 2 ptos

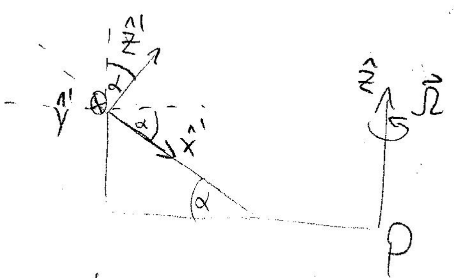
c) 1 pto

P2

(a) Si despreciamos todas las fuerzas no inerciales, excepto la de Coriolis, la ecuación de movimiento en S' resulta:

$$m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$$

Sea S un sistema de referencia inercial con origen en el punto P, con el eje $\hat{z}$ coincidiendo con el eje de rotación de la plataforma. Así:



$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{z} = \Omega(\cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}')$$

Por otro lado: $\vec{F} = N\hat{z}' - mg(\cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}')$

(0,5 ptos.)

Entonces:

$$\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \Omega(\cos\alpha\,\hat{z}' - \sin\alpha\,\hat{x}')\times(\dot{x}'\hat{x}' + \dot{y}'\hat{y}' + \dot{z}'\hat{z}')$$

$$= \Omega\left(\dot{x}'\cos\alpha(\hat{y}') + \dot{y}'\cos\alpha(-\hat{x}') - \sin\alpha\,\dot{y}'(\hat{z}') - \sin\alpha\,\dot{z}'(-\hat{y}')\right)$$

$$= \Omega\left((\dot{x}'\cos\alpha + \dot{z}'\sin\alpha)\hat{y}' - \dot{y}'\cos\alpha\,\hat{x}' - \dot{y}'\sin\alpha\,\hat{z}'\right) \quad (1\text{ pto.})$$

Y como $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{x}' + \ddot{y}'\hat{y}' + \ddot{z}'\hat{z}'$, reemplazando en la ecuación para S', para cada componente tenemos:

$\hat{x}'$: $m\ddot{x}' = mg\sin\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\cos\alpha$

$\hat{y}'$: $m\ddot{y}' = -2m\Omega(\dot{x}'\cos\alpha + \dot{z}'\sin\alpha)$

$\hat{z}'$: $m\ddot{z}' = N - mg\cos\alpha + 2m\Omega\dot{y}'\sin\alpha$

Como el movimiento de la partícula ocurre en el plano inclinado, $\dot{z}'=\ddot{z}'=0$. Las ecs. de mov. entonces son:

$$\hat{x}': \quad \ddot{x}' = g \sin\alpha + 2\Omega \cos\alpha \, \dot{y}' \qquad (1)$$

$$\hat{y}': \quad \ddot{y}' = -2\Omega \cos\alpha \, \dot{x}' \qquad (2) \qquad (0.5 \text{ ptos.})$$

$$\hat{z}': \quad 0 = N - mg\cos\alpha + 2m\dot{y}' \sin\alpha \qquad (3)$$

(b) Derivamos la ec. (1): $\dddot{x}' = 2\Omega \cos\alpha \, \ddot{y}'$ y la ec. (2): $\dddot{y}' = -2\Omega \cos\alpha \, \ddot{x}'$, reemplazamos luego $\ddot{x}'$ e $\ddot{y}'$ de las ecs. (1) y (2). Tenemos entonces:

$$\dddot{x}' = -4\Omega^2 \cos^2\alpha \, \dot{x}' \qquad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

$$\dddot{y}' = -2\Omega g \cos\alpha \sin\alpha - 4\Omega^2 \cos^2\alpha \, \dot{y}'$$

Para la ec. en x' identificamos $A=0$ y $\omega_0^2 = 4\Omega^2 \cos^2\alpha$, de acuerdo a la indicación para la ec. del tipo $\dddot{u} = A - \omega_0^2 \dot{u}$:

$$\Rightarrow \quad x(t) = C_1 \cos(2\Omega \cos\alpha t) + C_2 \sin(2\Omega\cos\alpha t) + C_3 \qquad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

Para y' se tiene $A = -2\Omega g \cos\alpha \sin\alpha$ y $\omega_0^2 = 4\Omega^2 \cos^2\alpha$:

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{-2\Omega g \cos\alpha \sin\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} t + C_4 \cos(2\Omega\cos\alpha t) + C_5 \sin(2\Omega\cos\alpha t) + C_6$$

(0,5 ptos.) $$y(t) = -\frac{g \sin\alpha}{2\Omega \cos\alpha} t + C_4 \cos(2\Omega\cos\alpha t) + C_5 \sin(2\Omega \cos\alpha t) + C_6$$

Las constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 y C_6 las determinamos de las condiciones iniciales.

Dado que la partícula inicia su movimiento desde el reposo relativo al plano inclinado y en el origen: $x'(0) = y'(0) = 0$; $\dot{x}'(0) = \dot{y}'(0) = 0$.

Al evaluar la ec. (1) en $t=0$: $\ddot{x}'(0) = g \sin\alpha$ (0,5 ptos.)

" (2) en $t=0$: $\ddot{y}'(0) = 0$

Evaluamos para x':

$$0 = x'(0) = C_1 + C_3 \Rightarrow C_1 = -C_3$$

$$0 = \dot{x}'(0) = C_2 \cdot (2\Omega \cos\alpha) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$g \sin\alpha = \ddot{x}'(0) = -C_1 (4\Omega^2 \cos^2\alpha) \Rightarrow C_1 = -\frac{g \sin\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha}$$

Entonces: $x'(t) = \dfrac{g \sin\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} \left(1 - \cos(2\Omega \cos\alpha\, t) \right)$ (0,5 ptos.)

Para y':

$$0 = y'(0) = C_4 + C_6 \Rightarrow C_4 = -C_6$$

$$0 = \dot{y}'(0) = -\frac{g \sin\alpha}{2\Omega \cos\alpha} + C_5 \cdot 2\Omega \cos\alpha \Rightarrow C_5 = \frac{g \sin\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha}$$

$$0 = \ddot{y}'(0) = -C_4 \cdot 4\Omega^2 \cos^2\alpha \Rightarrow C_4 = 0 \Rightarrow C_6 = 0$$

Entonces: $y'(t) = \dfrac{g \sin\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} \sin(2\Omega \cos\alpha\, t) - \dfrac{g \sin\alpha}{2\Omega \cos\alpha}\, t$ (0,5 ptos.)

(c) Para obtener el máximo descenso, buscamos el máximo de x', el cual es claro que es cuando $\cos(2\Omega \cos\alpha\, t) = -1$

$$\Rightarrow \quad x'_{max} = \frac{g \sin\alpha}{2\Omega^2 \cos^2\alpha} \qquad \text{(0,2 ptos.)}$$

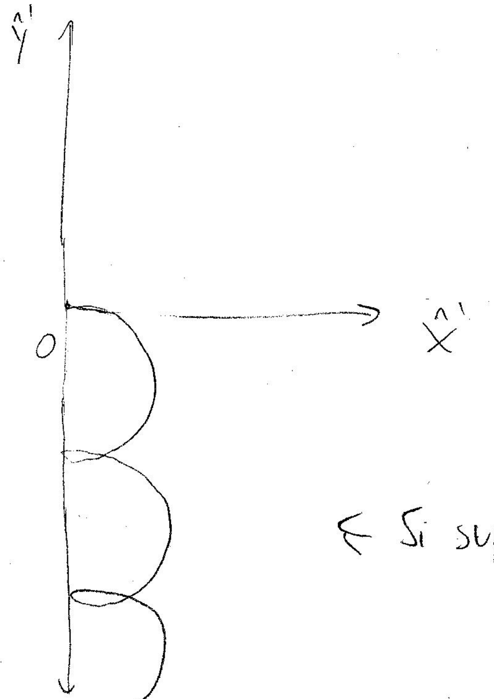
(c) La rapidez la obtenemos de $v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2$

$$v^2 = \frac{g^2 \sin^2\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} \sin^2(2\Omega \cos\alpha\, t) + \left(\frac{g^2 \sin^2\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} \left(\cos(2\Omega\cos\alpha\, t) - 1 \right)^2 \right)$$

$$= \frac{g^2 \sin^2\alpha}{4\Omega^2 \cos^2\alpha} - \frac{g^2 \sin^2\alpha}{2\Omega^2\cos^2\alpha} \cos(2\Omega\cos\alpha\, t) + \frac{g^2 \sin^2\alpha}{4\Omega^2\cos^2\alpha}.$$

Y es máxima cuando $\cos(2\Omega\cos\alpha\, t) = -1 \Rightarrow v^2_{max} = \frac{g^2 \sin^2\alpha}{\Omega^2\cos^2\alpha}$ (0,3 ptos.)

Esquema:



(0,5 ptos.)

← Si suponemos que $\Omega > 0$

Puntaje:

a) 0,5 ⇒ F

1,0 ⇒ $\vec{\Omega} \times \vec{v}'$

0,5 ⇒ EDOs.

b) 0,5 ⇒ EDOs de la forma $\ddot{u} = A - \omega_0^2 u$

0,5×2 ⇒ x(t), y(t) sin aplicar cond. iniciales

0,5 ⇒ Condiciones iniciales

0,5×2 ⇒ x(t), y(t) con cond. iniciales

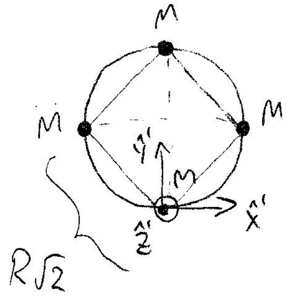
c) 0,2 ⇒ Máx. descenso

0,3 ⇒ Máx. rapidez.

0,5 ⇒ esquema

P3

(a)



$$I_{ij} = \sum_a m_a \left(r_a^2 \delta_{ij} - r_{a,i} r_{a,j} \right)$$

Se tiene:

$$I_{11} = M\cdot 0 + MR^2 + M(2R)^2 + MR^2 = 6MR^2$$

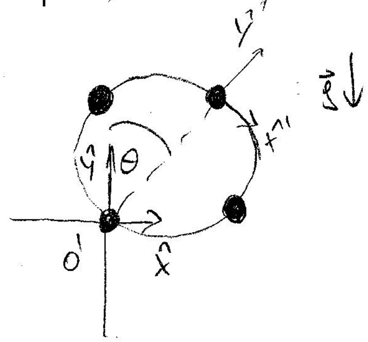
$$I_{22} = M\cdot 0 + MR^2 + M\cdot 0 + MR^2 = 2MR^2$$

$$I_{33} = M\cdot 0 + M(R\sqrt{2})^2 + M(2R)^2 + M(R\sqrt{2})^2 = 8MR^2$$

Dado que hay simetría con respecto a los planos $x'y'$ y $y'z'$, los productos de inercia (elementos que no están en la diagonal) son nulos. (0,5 ptos.)

$$\Rightarrow I^{O'} = 2MR^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ pto.})$$

(b)



Como O' es un punto fijo: $\vec{l}_{O'} = I^{O'} \vec{\Omega}$

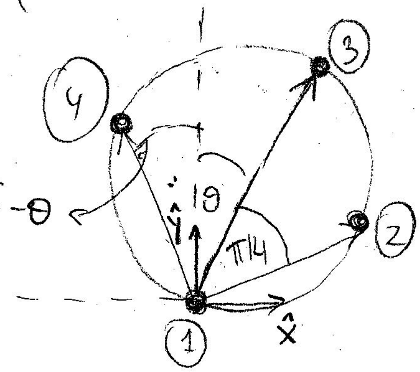
S: sistema inercial con mismo origen que S', con eje $\hat{y}$ perpendicular al suelo.

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = -\dot{\theta}\hat{z} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

Entonces:

$$\vec{l}_{O'} = 2MR^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\theta} \end{pmatrix} = -8MR^2\dot{\theta}\,\hat{z} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

Luego: $\dot{\vec{l}}_O = -8MR^2\ddot{\theta}\,\hat{z}$



Obtengamos el vector posición de cada masa: $\frac{\pi}{4} - \theta$

$$\vec{r}_1 = 0$$

$$\vec{r}_2 = R\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4 + \theta)\,\hat{y} + \sin(\pi/4 + \theta)\,\hat{x} \right)$$

$$\vec{r}_3 = 2R\left(\cos\theta\,\hat{y} + \sin\theta\,\hat{x} \right)$$

$$\vec{r}_4 = R\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4 - \theta)\,\hat{y} - \sin(\pi/4 - \theta)\,\hat{x} \right)$$

Por otro lado $m\vec{g} = -mg\hat{y}$.

Dado que sólo el peso ejerce torque, tenemos:

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{g} = 0$$

$$\vec{\tau}_2 = -R\sqrt{2}\, mg \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\hat{z} = -R\sqrt{2}\, mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\theta + \sin\theta\right)\right)\hat{z}$$

$$\vec{\tau}_3 = -2R\, mg \sin\theta\, \hat{z}$$

$$\vec{\tau}_4 = R\sqrt{2}\, mg \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = R\sqrt{2}\, mg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\right)\hat{z}$$

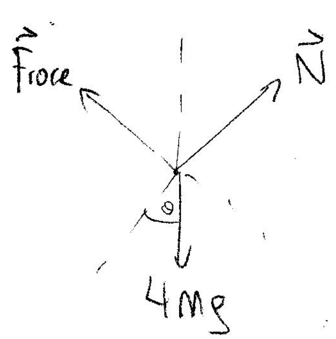
$$\Rightarrow \vec{\tau}_{o'} = -2R\, mg \sin\theta\, \hat{z} - 2R\, mg \sin\theta\, \hat{z} = -4mgR\sin\theta\, \hat{z} \quad (1\ \text{pto.})$$

Y ya que $\dot{\vec{l}}_{o'} = \vec{\tau}_{o'} \Rightarrow 8mR^2\ddot{\theta} = 4mgR\sin\theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta\,\dot{\theta} \Rightarrow \left.\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right|_0^{\dot{\theta}} = \frac{g}{2R}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\theta}\right) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}(1-\cos\theta)$$

(0,5 ptos.)

(c) Estudiemos el centro de masas. Las fuerzas que actúan son:



$$\vec{F} = 4m\vec{a} = N\hat{\rho} - F_r\hat{\theta} - 4mg\cos\theta\,\hat{\rho} + 4mg\sin\theta\,\hat{\theta}$$

Dado que $\vec{r} = R\hat{\rho} \Rightarrow \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{\rho} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$

Entonces:

$\hat{\rho}]: -4mR\dot{\theta}^2 = N - 4mg\cos\theta$ (0,5 ptos)

$\hat{\theta}]: 4mR\ddot{\theta} = 4mg\sin\theta - F_r$

Así:

$$N = -4mR\dot{\theta}^2 + 4mg\cos\theta$$

$$= -4mg(1-\cos\theta) + 4mg\cos\theta$$

$$= 4mg(2\cos\theta - 1) \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

$$F_r = 4mg\sin\theta - 4mR\ddot{\theta}$$

$$= 4mg\sin\theta - 2mg\sin\theta$$

$$= 2mg\sin\theta \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

(d) Se tiene $f_r \leq \mu \cdot N$. En $\theta = 30°$ tenemos la igualdad.

Luego:

$$2mg\sin 30° = \mu \cdot 4mg(2\cos 30° - 1)$$

$$1 = \mu \cdot 4(\sqrt{3} - 1)$$

$$\mu = \frac{1}{4(\sqrt{3}-1)} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

Puntaje:

a) $I_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos.
$I^{O'}$ $\Rightarrow$ 1 pto.

b) $\vec{\Omega}$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos.
$\vec{l}_{O'}$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos.
$\vec{\tau}_{O'}$ $\Rightarrow$ 1 pto.
$\dot{\theta}^2(\theta)$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos.

c) EDOs $\Rightarrow$ 0,5 ptos.
$N(\theta)$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos
$F_{roce}(\theta)$ $\Rightarrow$ 0,5 ptos

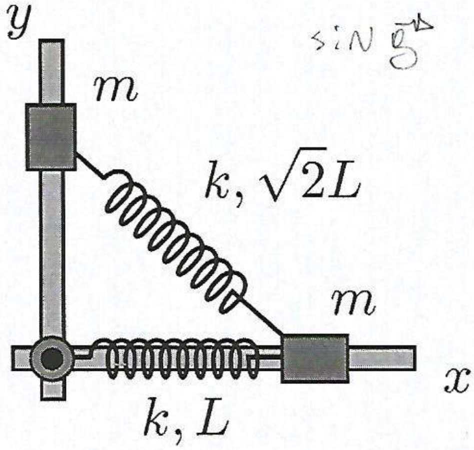
d) μ $\Rightarrow$ 0,5 ptos.

FI-2001 Mecánica - Sección-6
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Jonathan Monsalve & Fabián Sepúlveda
FCFM, Universidad de Chile

Control 3
Miércoles 29 de julio, 2015
Tiempo: 3horas

P1: Dos partículas de masa m, unidas por un resorte de constante elástica k y largo natural $\sqrt{2}L$, pueden deslizar sin roce a lo largo de dos rieles, uno vertical y el otro horizontal. La masa sobre le riel horizontal está unida al origen O (donde se cruzan los rieles) mediante un resorte de constante elástica k y largo natural L.

sin $\vec{g}$



(a) (1.0) Determine la forma del Lagrangiano del sistema. Utilice como coordenadas la posición x de la masa sobre el riel horizontal, y la posición y de la masa sobre el riel vertical, ambas con respecto al origen O.

(b) (1.0) Determine las configuraciones de equilibrio del sistema, indicando si estas son estables o inestables.

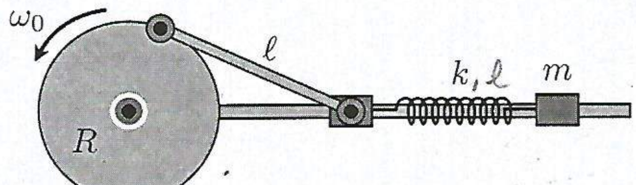
(c) (2.0) Determine la forma apropiada del Lagrangiano para describir pequeñas oscilaciones en torno a la configuración de equilibrio estable.

(d) (1.0) Deduzca las ecuaciones de movimiento a partir del Lagrangiano encontrado en la parte (c). Exprese su resultado de forma vectorial, y determine la matriz de frecuencias del sistema.

(e) (0.5) Encuentre las frecuencias propias de los modos de oscilación del sistema.

(f) (0.5) Encuentre los auto-vectores de la matriz de frecuencia, y a partir de estos, bosqueje el tipo de movimiento asociado a cada modo.

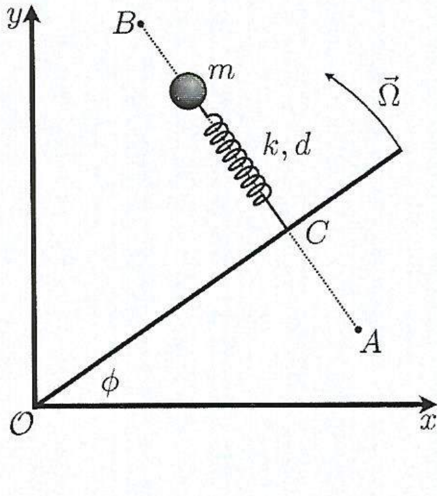
P2: Una rueda de radio R gira con velocidad angular ω_0. Dicha rueda mantiene un pistón en movimiento a lo largo del eje horizontal a través de una barra de largo $\ell \gg R$, tal como lo muestra la figura. El pistón se mantiene conectado a otro pistón de masa m, también confinado a la horizontal, mediante un resorte de constante elástica k y largo natural ℓ. En $t = 0$, el eje que une la barra con la rueda se encuentra en la posición horizontal al lado derecho del eje de rotación de la rueda, el largo del resorte coincide con su largo natural, y la masa está en reposo.



(a) (1.0) Encuentre una expresión para la posición del pistón en función del tiempo $x_p(t)$ considerando que $\ell \gg R$.
(b) (1.5) Determine el Lagrangiano del sistema (utilice como coordenada la distancia x de la partícula al eje de rotación de la rueda. **(c) (2.0)** Deduzca la ecuación de movimiento y encuentre la solución del sistema. **(d) (1.5)** Determine la forma de la solución en el límite $k/m \to \omega_0^2$.

P3: Una partícula P de masa m está unida a un resorte de constante elástica k y largo natural d. La partícula desliza sin roce a lo largo de un riel AB, perpendicular a la recta OC de largo L que pasa por el origen. Tanto OC como AB rotan con velocidad angular uniforme $\Omega\hat{k}$ como lo indica la figura. Elija un sistema de referencia no inercial S' tal que el eje x', contenga a OC, para obtener el movimiento de la partícula P.

$g=0$



(a) (1.5) Dé una expresión a cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula en el sistema no inercial (esto incluye las fuerzas típicas de estos sistemas de referencia).

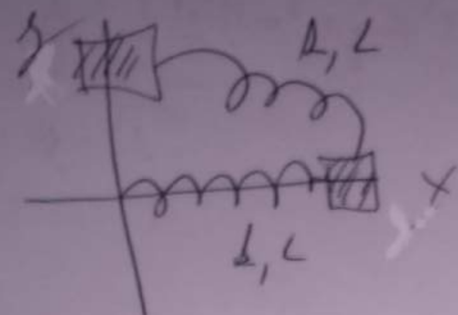
(b) (1.0) Distinga qué tipo de movimiento tiene la partícula dependiendo del valor de $k/m - \Omega^2$.

(c) (1.0) Si $k/m - \Omega^2$ es positivo, ¿Cuál es la posición de equilibrio de la partícula?

(d) (1.5) Determine la fuerza que ejerce la barra AB sobre la partícula en el plano horizontal.

(e) (1.0) Si la partícula inicialmente tiene velocidad nula con respecto a la barra AB y a una distancia ϵ del punto de equilibrio (de modo que el resorte está estirado), determine la posición de la partícula en función de la velocidad en el sistema no inercial.

P1]



a) $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x - L)^2$

$- \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)^2$

b) $U = \frac{k}{2}(x-L)^2 + \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)^2$

condición de equilibrio

$\nabla U = 0 = \left(k(x-L) + k\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\hat{x}$

$+ k\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\hat{y}$

Usando que $\dfrac{(\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{2}L)\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

Supongamos $y=0$

$\Rightarrow k(x-L)+k(x-\sqrt{2}L)=0$

$\Rightarrow x=\dfrac{(1+\sqrt{2})}{2}L$

1° pto de eq. $\left(\dfrac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\ 0\right)$

ahora $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\,L$

$\Rightarrow k(x-L)=0 \Rightarrow x=L \Rightarrow y=L$

2° pto. de eq. (L,L)

Para ver estabilidad usamos la condición de 2° orden $\Rightarrow$ necesitamos las 2° derivadas, pero las esrbimos de forma conveniente a los ptos. de eq.

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{(L,L)} = k \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{(L,L)} = k\frac{L^2}{2L^2} = \frac{k}{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{(L,L)} = k\frac{xy}{x^2+y^2}\Bigg|_{(L,L)} = k\frac{L^2}{2L^2} = \frac{k}{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{(L,L)} = k + \frac{k x^2}{x^2+y^2}\Bigg|_{(L,L)} = k + \frac{kL^2}{2L^2} = k\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3k}{2}$$

$$H U\Big|_{(L,L)} = \frac{k}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

valores propios

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{16} \pm \sqrt{8}}{2}$$

$\lambda_\pm > 0 \Rightarrow (L, L)$ es estable

por topologia, $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}L, 0\right)$ es inestable

Además

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}L, 0\right)} = \left. k\,\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}L, 0\right)}$$

$$= k\,\frac{\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)}{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = k\left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$= k\left(1 - \frac{2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{1-2}\right) = k\left(1 + 2\sqrt{2}(1-\sqrt{2})\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\, 0\right)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\, 0\right)} = k\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}\,L}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right.$$

$$\left.\left. + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}\,L\right)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\right|_{\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\, 0\right)}$$

como $\left.HU\right|_{\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\, 0\right)}$ es diagonal y $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{\left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L,\, 0\right)} < 0$

$\Rightarrow \left(\frac{(1+\sqrt{2})}{2}L, 0\right)$ no es pto de eq. estable, comprobando lo que habíamos propuesto

c) obviando la simetría axial del sistema veamos el pto de eq $(x^*, y^*) = (L, L)$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(x-L)^2 - \frac{k}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)^2$$

$$x = L + \varepsilon_x \quad , \quad y = L + \varepsilon_y$$

$$(x-L)^2 = (L + \varepsilon_x - L)^2 = \varepsilon_x^2$$ No es necesario aprox a orden 2

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}L\right)^2 = \left(\sqrt{2L^2 + 2L(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2} - \sqrt{2}L\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{A+\delta} - \sqrt{2}L\right)^2 \quad ; \quad A = 2L^2 \, , \quad \delta = 2L(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2$$

$$\sqrt{A+\delta} \approx \sqrt{A} + \frac{1}{2\sqrt{A}}\delta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{A}^3}\delta^2$$

$$\left(\sqrt{A+\delta}-\sqrt{2}L\right) \approx \left(\frac{1}{2\sqrt{2}L}\left(2L(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2\right)-\frac{1}{8}\frac{\left(2L(\varepsilon_x+\varepsilon_y)+\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2\right)^2}{L^3}\right.$$

Como aprox el Lagrangeano hasta orden 2 en las perturbaciones $\Rightarrow \left(\sqrt{A+\delta}-\sqrt{2}L\right)$ debe ser aprox a lo más hasta orden lineal

$$\Rightarrow \left(\sqrt{A+\delta}-\sqrt{2}L\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} \simeq \frac{m}{2}(\dot{\varepsilon}_x^2+\dot{\varepsilon}_y^2)-\frac{k}{2}\varepsilon_x^2-\frac{k}{2}\frac{1}{4}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2+2\varepsilon_x\varepsilon_y)$$

d) $$m\ddot{\varepsilon}_x = -k\varepsilon_x-\frac{k}{4}\varepsilon_x-\frac{k}{4}\varepsilon_y = -\frac{5}{4}k\varepsilon_x-\frac{k}{4}\varepsilon_y$$

$$m\ddot{\varepsilon}_y = -\frac{k}{4}\varepsilon_y-\frac{k}{4}\varepsilon_x$$

$$\begin{pmatrix}\ddot{\varepsilon}_x\\ \ddot{\varepsilon}_y\end{pmatrix} - \frac{k}{4m}\begin{pmatrix}-9 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{pmatrix} = 0$$

Soluciones del tipo onda plana $\begin{pmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\end{pmatrix} = e^{i\omega t}\begin{pmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}9-\omega^2 & 1\\ 1 & 1-\omega^2\end{bmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\end{pmatrix} = 0$$; cada numero está implicitamente multiplicado por $\frac{k}{4m}$

e)

$\det(M) = 0$ para que existan sols. no triviales

$$(9-\omega^2)(1-\omega^2) - 1 = 9 - 10\omega^2 + \omega^4 - 1$$

$$= (\omega^2)^2 - 10\omega^2 + 8 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-32}}{2} = (5 \pm \sqrt{17})\frac{k}{8m}$$

$$(5-6\omega^2)(1-\omega^2)-1=(\omega^2)^2-6\omega^2+5-1=0$$

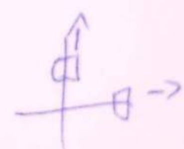
$$\omega^2=\frac{6\pm\sqrt{36-16}}{2}=(3\pm\sqrt{5})\frac{1}{4m}$$

f)

$\omega^2=3+\sqrt{5}$

$$\begin{bmatrix} 2-\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \end{pmatrix}=0$$

$$\left.\begin{aligned} &(2-\sqrt{5})\varepsilon_x^0+\varepsilon_y^0=0 \\ &\varepsilon_x^0+-(2+\sqrt{5})\varepsilon_y^0=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$



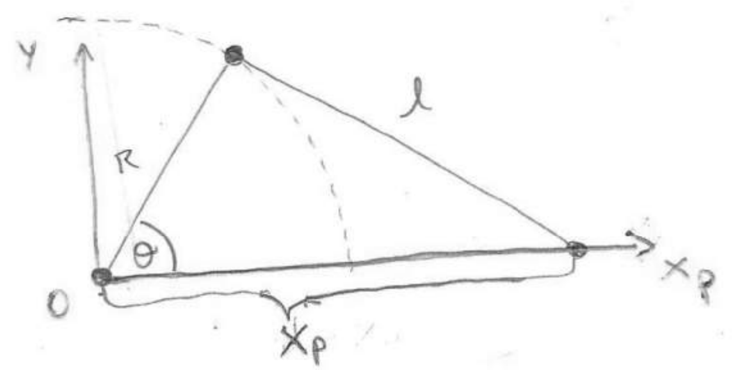
$\omega^2=3-\sqrt{5}$

$$\begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$$

PAUTA P2 C3
MECÁNICA OTOÑO 2015

P1

(a) CONSIDERAR LA SIGUIENTE FIGURA:



POR TEOREMA DEL COSENO:

$$\ell^2 = R^2 + X_p^2 - 2RX_p\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad 0 = X_p^2 - 2RX_p\cos\theta + R^2 - \ell^2 \quad (0.5)$$

ASOCIANDO LOS TÉRMINOS DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA:

$$A = 1$$
$$B = -2R\cos\theta$$
$$C = R^2 - \ell^2$$

$$\Rightarrow \quad X_p = \frac{2R\cos\theta \pm \sqrt{4R^2\cos^2\theta - 4(R^2-\ell^2)}}{2}$$

$$X_p = R\cos\theta \pm \frac{1}{2}\sqrt{4R^2\cos^2\theta + \underbrace{4(\ell^2 - R^2)}_{\sim 4\ell^2 \text{ PUESTO QUE } \ell \gg R}}$$

$$\rightarrow \quad X_p = R\cos\theta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{4R^2\cos^2\theta + 4\ell^2}_{4\ell^2 \text{ PUESTO QUE:}}}$$

$\ell^2 \gg R^2$

$\Rightarrow \ell^2\cos^2\theta \gg R^2\cos^2\theta \Rightarrow 4\ell^2 \gg 4\ell^2\cos^2\theta \gg 4R^2\cos^2\theta$

(a) FINALMENTE:

$$X_p = R\cos\theta \pm \frac{1}{2}\sqrt{4l^2}$$

$$X_p = R\cos\theta \pm l$$

$\theta = w_o t$

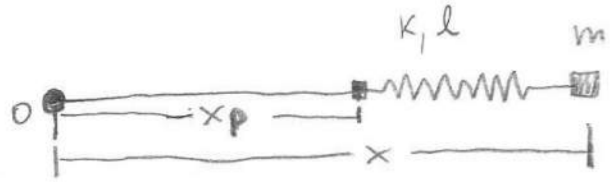
$$\Rightarrow \boxed{X_p = l + R\cos\theta}$$

(0,5)

(b) EL LAGRANGIANO ESTÁ DADO POR:

$$L = K - U$$

DE LA FIGURA SIGUIENTE SE DESPRENDEN LAS ECUACIONES PARA K Y U:



$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k \left(x - x_p - l \right)^2$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \left(x - l - R\cos(w_o t) - l \right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k \left(x - R\cos(w_o t) \right)^2}$$

(1,5)

P1

(c) LA ECUACIÓN DE EULER-LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}k\cdot 2\left(x - R\cos(\omega_0 t)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - R\cos\omega_0 t)$$

REEMPLAZANDO LOS TÉRMINOS:

$$\boxed{m\ddot{x} + K(x - R\cos\omega_0 t) = 0} \qquad (10)$$

PARA SOLUCIONAR LA ECUACIÓN SE PROCEDE DE LA SIGUIENTE FORMA:

(1) LA SOLU. GRAL PROPUESTA ES: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

CON $x_1(t) = A\,\mathrm{sen}(Wt) + B\cos(Wt)$ → PUEDE ARGUMENTARSE CON VALORES PROPIOS

$x_2(t) = D\cos(\omega_0 t)$.

$x_2(t)$ ES SOLU DE $x(t)$ Y POR ENDE:

$$\dot{x}_2(t) = -D\omega\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -D\omega\cos(\omega_0 t)$$

LUEGO: $m\ddot{x} = -K(x - R\cos\omega_0 t)$

$$-mD\omega_0^2\cos(\omega_0 t) = -k\left(D\cos(\omega_0 t) - R\cos(\omega_0 t)\right)$$

P1

(c) $$-mD\omega_0^2\cos(\omega_0 t) = -k(D-R)\cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \quad mD\omega_0^2 = k(D-R)$$

$$mD\omega_0^2 - kD = -kR$$

$$D(m\omega_0^2 - k) = -kR$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = \frac{kR}{k - m\omega_0^2}}$$

$\Rightarrow$ Luego:

$$x(0) = R + 2l$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

$\Rightarrow$ Pero: $x(0) = B + D = R + 2l$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = R + 2l - \frac{kR}{k - m\omega_0^2}}$$

pero $\dot{x}(0) = A\omega = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \left(R + 2l - \frac{kR/m}{\frac{k}{m} - \omega_0^2}\right)(\cos \omega t) + \left(\frac{kR/m}{\frac{k}{m} - \omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t)}$$

(10)

(d) $\Rightarrow$ cuando $\frac{k}{m} \to \omega_0^2$ / hay resonancia.-

$\Rightarrow$

Expandiendo la función por Taylor: y despreciando términos cuadráticos

(1,5)

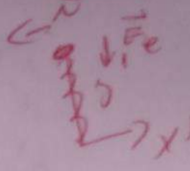
$$x(t) = (R+2\ell)\cos(\omega_0 t) + \frac{R\omega_0 t}{2}\sin(\omega_0 t)$$

LO CUAL PARA $\omega \to \omega_0$, DIVERGE

(RESONANCIA).-

P3

a) DCL



Fza. elástica

$$\vec{F}_e = -k(y-d)\hat{y}'$$

Normal

$$\vec{N} = -N\hat{x}'$$

Fzas. Ficticias

La aceleración del sist. no inercial: $\vec{F}_1 = -m\ddot{\vec{R}}$

centrífuga $\vec{F}_2 = -m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}')$

coriolis: $\vec{F}_3 = -m\vec{\Omega}\times\vec{v}'$

b) $m\vec{a}' = \vec{F}_e + \vec{N} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

$\hat{k} \parallel \hat{k}' \Rightarrow \vec{\Omega} = \Omega\hat{k} = \Omega\hat{k}'$

$\vec{r}' = y\hat{y}'$

$\vec{v}' = \dot{y}\hat{y}'$

$\vec{a}' = \ddot{y}\hat{y}'$

$\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') = \Omega^2 y\,\hat{k}'\times(\hat{k}'\times\hat{y}') = -\Omega^2 y\,\hat{k}'\times\hat{x}'$

$= -\Omega^2 y\,\hat{y}'$

$$\vec{\Omega}\times\vec{v}' = \Omega \dot{y}\, \hat{z}'\times\hat{y}' = -\Omega\dot{y}\,\hat{x}'$$

$$\vec{R} = L\hat{x}' \qquad \hat{x}' = \cos(\Omega t)\hat{x} + \mathrm{Sen}(\Omega t)\hat{y}$$

$$\hat{y}' = -\mathrm{Sen}(\Omega t)\hat{x} + \cos(\Omega t)\hat{y}$$

$$\dot{\vec{R}} = L\Omega\hat{y}'$$
$$\ddot{\vec{R}} = -\Omega^2 L\hat{x}'$$

$$m\ddot{y}\,\hat{y}' = -k(y-d)\hat{y}' - N\hat{x}' + m\Omega^2 L\hat{x}' + m\Omega^2 y\hat{y}'$$
$$+ m\Omega\dot{y}\hat{x}'$$

$\boxed{\hat{x}'}$ $\quad 0 = -N + m\Omega^2 L + m\Omega\dot{y}$

$\boxed{\hat{y}'}$ $\quad m\ddot{y} = -ky + kd + m\Omega^2 y = -(k - m\Omega^2)y$
$+ kd$

USAMOS LA 2° ec. $\boxed{y'}$

Y HACEMOS el C.V.

$$\bar{y} = y - \frac{kd}{(k - m\Omega^2)}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\bar{y}} = -(k - m\Omega^2)\bar{y}$$

$$\ddot{\bar{y}} = -\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\bar{y}$$

$\Rightarrow$ 2 opciones

$\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) > 0 \Rightarrow$ osilaciones en torno a $\bar{y} = 0$

$\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) < 0 \Rightarrow$ liberación de la MASA, YA que
LAS sols. son exponenciales
de argumento Real.

c) imponemos dinámica nula

$$\Rightarrow 0 = -\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right)\bar{y}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0 \Rightarrow y - \frac{kd}{(k - m\Omega^2)} = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{kd}{k - m\Omega^2} > 0 \text{ es posición de eq.}$$

d) La fza. q ejerce la barra AB contra la partícula es la normal

$$N = m\Omega^2 L + m\Omega\dot{y}$$

portanto resolvamos la EDO ~~condiciones iniciales~~ $\cancel{\bar{y}(0) = y_0 \;;\; \dot{\bar{y}}(0) = \dot{y}_0}$

como $\left(\frac{k}{m} - \Omega^2\right) > 0 \Rightarrow$ las sols. son senos y cosenos

$$\bar{y}(t) = A\,\text{sen}\left(\sqrt{\tfrac{k}{m} - \Omega^2}\, t\right) + B\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m} - \Omega^2}\, t\right)$$

$$\dot{y}(t) = \sqrt{\tfrac{k}{m} - \Omega^2}\left(-B\,\text{sen}\left(\sqrt{\tfrac{k}{m} - \Omega^2}\, t\right) + A\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m} - \Omega^2}\, t\right)\right)$$

$$\mu = m\Omega^2 L + m\Omega\sqrt{\frac{k}{m}-\Omega^2}\left(-B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\Omega^2}\,t\right)+A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\Omega^2}\,t\right.\right.$$

e) $\dot{\bar{y}}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\bar{y}(t) = B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\Omega^2}\,t\right)$$

$$\cancel{\Rightarrow y(t) = \frac{kd}{(k-m\Omega^2)} + B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}-\Omega^2}\,t\right)}$$

$$y(0) = \frac{kd}{(k-m\Omega^2)} + \varepsilon \Rightarrow \bar{y}(0) = \varepsilon$$

$$\ddot{\bar{y}} = -\left(\frac{k}{m}-\Omega^2\right)\bar{y} = \dot{\bar{y}}\frac{d\dot{\bar{y}}}{d\bar{y}}$$

$$-\left(\frac{k}{m}-\Omega^2\right)\bar{y}\,d\bar{y} = \dot{\bar{y}}\,d\dot{\bar{y}}$$

$$-\left(\frac{k}{m}-\Omega^2\right)\left(\frac{\bar{y}^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{\dot{\bar{y}}^2}{2}$$

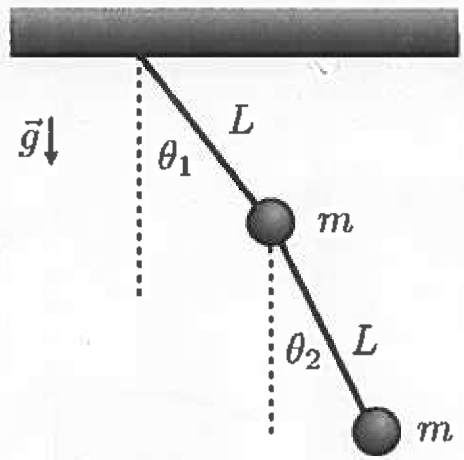
$$\bar{y}^2(\dot{\bar{y}}) = \varepsilon^2 - \frac{\dot{\bar{y}}^2}{\left(\frac{k}{m}-\Omega^2\right)}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}$$

$$\gamma(\dot{\gamma}) = \frac{kd}{(k - m\Omega^2)} + \sqrt{c^2 - \frac{\dot{\gamma}^2}{\left(\frac{k}{m} - \cancel{m}\Omega^2\right)}}$$

FI-2001 Mecánica - Sección-3
Prof. Gonzalo A. Palma.
Aux's: Ernesto Berrios y Tomás Müller
FCFM, Universidad de Chile

Examen
Viernes 11 de julio, 2014
Tiempo: 3horas



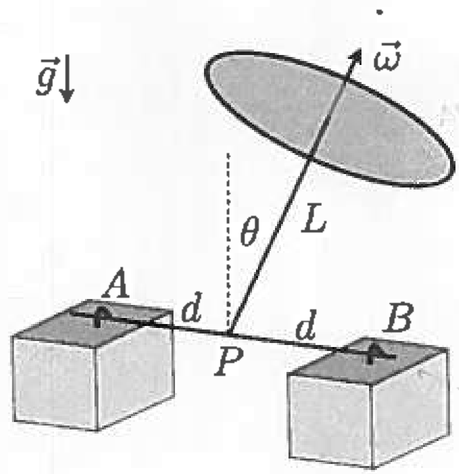
P1: Desde un péndulo de masa m y largo L se sujeta otro péndulo exactamente igual de modo que ambos pueden oscilar libremente. Si sus oscilaciones se describen respecto a los ángulos que cada péndulo forma con la vertical, θ_1 y θ_2:

(a) Encuentre el Lagrangiano del sistema en función de las coordenadas θ_1 y θ_2, y velocidades $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$.

(b) Encuentre las ecuaciones de movimiento para θ_1 y θ_2.

(c) Encuentre las frecuencias propias del sistema y los modos normales asociados a éstas (incluya un bosquejo de los modos encontrados).

(d) Considere las siguientes condiciones iniciales: $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ y $\dot{\theta}_1(0) = C$. Demuestre que ele movimiento subsiguiente es tal que a intervalos regulares un péndulo está en reposo y el otro oscila con amplitud máxima.



P2: Una rueda de de radio R y masa M gira con una velocidad angular $\vec{\omega}$ constante en torno a su eje de simetría. Por este eje pasa una estructura rígida sin masa, en forma de T, de lados L y $2d$, sujeta por dos abrazaderas en los puntos fijos A y B (ver figura). Si el sistema se suelta desde el reposo, en una posición muy cercana a la vertical ($\theta \simeq 0$), dejándolo caer por acción de la gravedad, calcule:

(a) La matriz de inercia de la rueda, modelándola como una circunferencia homogénea, cuya densidad de masa por unidad de longitud es $\lambda = M/2\pi R$.

(b) La velocidad angular del eje $\dot{\theta}$ en función del ángulo θ.

(c) El momento angular de la rueda con respecto al punto P (punto medio entre A y B).

(d) Las reacciones que ejercen las abrazaderas en los puntos A y B, en función de θ.

P3: Parte 1: Considere un satélite terrestre que se mueve en una trayectoria elíptica, en la cual su menor distancia al centro de la Tierra es R (posición A). En el momento cuando el satélite está pasando por el punto más alejado de su órbita (posición B) se encienden los motores de modo de aumentar bruscamente su rapidez hasta llevarla a la que tenía en la posición A. Si como resultado de esa acción el satélite queda en una órbita parabólica, determine:

(a) La distancia del satélite al centro de la Tierra cuando se encuentra en la posición B.

(b) El aumento de energía cinética que fue necesario entregarle mediante el encendido de los motores, para colocarlo en órbita parabólica.

Parte 2: Un satélite de masa M orbita la Tierra sobre el Ecuador, en forma geoestacionaria (se mantiene siempre sobre el mismo punto). Determine el radio de la órbita (distancia al centro de la Tierra). Indique su respuesta en función del radio de la Tierra ($R_T = 6400$Km), de la aceleración gravitacional junto a la superficie ($g = 10\text{m/s}^2$) y del periodo de rotación del planeta $T = 86400$s.

P1)

$$\vec{r}_1 = (L\sin\theta_1, -L\cos\theta_1)$$

$$\vec{r}_2 = (L\sin\theta_1 + L\sin\theta_2, -L\cos\theta_1 - L\cos\theta_2)$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta}_1)^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}_1^2 + 2L^2\cos\theta_1\cos\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + L^2\dot{\theta}_2^2 + 2L^2\sin\theta_1\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[L^2\dot{\theta}_1^2 + L^2\dot{\theta}_2^2 + 2L^2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]$$

$$\Rightarrow K = mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + L^2m\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$U = -2mgL\cos\theta_1 - mgL\cos\theta_2$$

$\Rightarrow L = K - U$ 1,5 ptos Veamos las ec. de E-L

b)

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} = 2mL^2\dot{\theta}_1 + mL^2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = 2mL^2\ddot{\theta}_1 + mL^2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 - mL^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + mL^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -ml^2 \sin(\theta_1-\theta_2)\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - 2mgl\sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = ml^2\dot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = ml^2\ddot{\theta}_2 + ml^2\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - ml^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2$$
$$+ ml^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = ml^2\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - mlg\sin\theta_2$$

$\underline{\theta_1)}$ $2ml\ddot{\theta}_1 + ml\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_2 + ml\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + 2mg\sin\theta_1 = 0$

$\underline{\theta_2)}$ $ml\ddot{\theta}_2 + ml\cos(\theta_1-\theta_2)\ddot{\theta}_1 - ml\sin(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_1^2 + mg\sin\theta_2 = 0$ 1,5 ptos

c) Simplifiquémoslas con pequeñas oscilaciones hasta orden 2

$\Rightarrow$ $\underline{\theta_1)}$ $2ml\ddot{\theta}_1 + ml\ddot{\theta}_2 + 2mg\theta_1 = 0$ (1)

$\underline{\theta_2)}$ $ml\ddot{\theta}_2 + ml\ddot{\theta}_1 + mg\theta_2 = 0$ (2)

P1

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{2g}{L}\theta_1 - \frac{g}{L}\theta_2 = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{2g}{L}\theta_1 + \frac{2g}{L}\theta_2 = 0$$

a esto se llega combinando (1) con (2)

1 pto por las aproximaciones

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2g/L & -g/L \\ -2g/L & 2g/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{2g}{L} - \omega^2\right)^2 - \frac{2g^2}{L^2} = 0$$

$$\frac{2g}{L} - \omega^2 = \pm \frac{\sqrt{2}g}{L}$$

0,5 ptos $\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{L}\left(2+\sqrt{2}\right) \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{L}\left(2-\sqrt{2}\right) \end{aligned}}$

$$\omega^2 = \frac{2g}{L} \pm \frac{\sqrt{2}g}{L} = \frac{g}{L}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

ω_1^2:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}g}{L} & -g/L \\ -2g/L & -\frac{\sqrt{2}g}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{g}{L}\left(\sqrt{2}V_1 + V_2\right) = 0 \Rightarrow V_1 = -V_2/\sqrt{2} \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$-\frac{g}{L}\left(2V_1 + \sqrt{2}V_2\right) = 0$$

$\underline{\omega_2^2}$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\frac{g}{L} & -g/L \\ -2g/L & \frac{\sqrt{2}g}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{g}{L}\left(V_1\sqrt{2} - V_2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{V_2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{g}{L}\left(\sqrt{2}V_2 - 2V_1 \right) = 0 \qquad \vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

0,5 pts les modes normales

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} A\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} B\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \dot\theta_2(0) = 0 \quad ; \quad \dot\theta_1(0) = C$

$\cos\phi_1 = \cos\phi_2 = 0$

$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned} A\cos\phi_1 + B\cos\phi_2 &= 0 \\ -\cancel{\sqrt{2}}A\cos\phi_1 + \cancel{\sqrt{2}}B\cos\phi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} B\cos\phi_2 &= 0 \\ A\cos\phi_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{\sqrt{2}}A\omega_1\sin\phi_1 - \cancel{\sqrt{2}}B\omega_2\sin\phi_2 &= 0 \\ -A\omega_1\sin(\phi_1) - B\omega_2\sin\phi_2 &= C \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -2B\omega_2 \cancel{\sin\phi_2}^{1} &= C \\ -2A\omega_1 \cancel{\sin\phi_1}_{1} &= C \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} B &= \frac{-C}{2\omega_2} \\ A &= \frac{-C}{2\omega_1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \left(\frac{-c}{2\omega_1} \right) \left(-\sin(\omega_1 t) \right)$$

$$- \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \left(\frac{-c}{2\omega_2} \right) \left(-\sin(\omega_2 t) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{c}{2\omega_2} \sin(\omega_2 t) \\ -\frac{c}{2\sqrt{2}\,\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{c}{2\sqrt{2}\,\omega_2} \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{2} \cos(\omega_1 t) - \frac{c}{2} \cos(\omega_2 t) \\ -\frac{c}{2\sqrt{2}} \cos(\omega_1 t) - \frac{c}{2\sqrt{2}} \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}$$

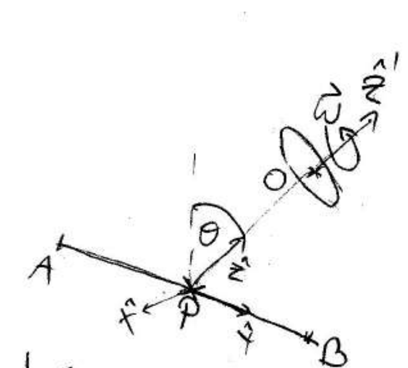
$$= \frac{c}{2} \begin{pmatrix} \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t) \right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \right) \end{pmatrix}$$

0,5 por la solución

0,5 por el análisis

cuando las posiciones son cero tenemos vel. máxima en $\dot{\theta}_2$ y cuando las vel. son cero, θ_2 tiene max amplitud

P2



a) Llamemos O al punto del centro de la rueda.

Luego, como $dm = \lambda dl = \lambda R d\theta = \frac{M}{2\pi} d\theta$

$$I_{ij}^{O'} = \int dm\left(\delta_{ij} r^2 - r_i r_j\right) \overset{r=R}{=} \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\delta_{ij}R^2 - r_i r_j\right)$$

Sist. inercial S con origen en P.
Sist. S' con origen en P y gira con vel. $\dot{\vec{\theta}}$.
Sist. S'' con origen en O y gira con vel. $\vec{\omega}$.

$$\Rightarrow I^O = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} R^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & R^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & R^2-z^2 \end{pmatrix} d\theta$$

$x = R\cos\theta$

$y = R\sin\theta$

$z = 0$

$$= \frac{M}{2\pi}\begin{pmatrix} 2\pi R^2 - R^2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi R^2 - R^2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi R^2 \end{pmatrix} = MR^2\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1 pto.)

Teorema de Steiner: $I^P_{ij} = I^O_{ij} + M\left(L^2\delta_{ij} - L_i L_j\right)$ donde $\vec{L} = L\hat{z}$

$$\Rightarrow I^P = MR^2\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} L^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= M\begin{pmatrix} R^2/2 + L^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2/2 + L^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}$$ (1 pto.)

c) $\vec{\Omega}$: Vel. angular entre S y S''. (S'' está fijo al cuerpo)

$\Rightarrow \vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}} + \vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{y} + \omega\hat{z}$ (0,5 ptos.)

Como P es pto. fijo: $\vec{l}_P = I_P\vec{\Omega} = M\begin{pmatrix} 0 \\ -(R^2/2 + L^2)\dot{\theta} \\ \omega R^2 \end{pmatrix}$ (0,5 ptos.)

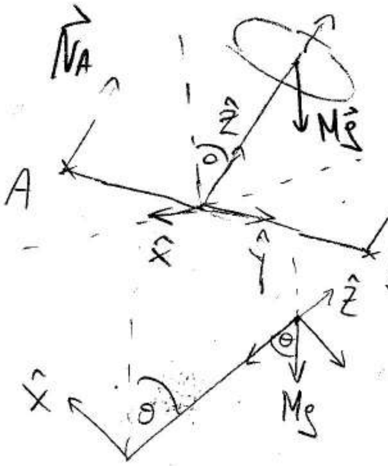
b) $\dot{\theta}(\theta)$?

Usamos $\dot{\vec{l}}_P = \vec{\tau}_P$ $\qquad * \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}\times\vec{A}$

$$\left(\frac{d\vec{l}_P}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{l}_P}{dt}\right)_{S'} - \dot{\theta}\,\hat{y}\times\vec{l}_P$$

$$= -M(R^2/2+L^2)\ddot{\theta}\,\hat{y} + \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ 0 & M(R^2/2+L^2)\omega & MR^2\omega \end{vmatrix}$$

$$= -M(R^2/2+L^2)\ddot{\theta}\,\hat{y} - \dot{\theta}MR^2\omega\,\hat{x} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$



c/r a P, $M\vec{g}$, $\vec{N}_A$ y $\vec{N}_B$ realizan torque.

$$M\vec{g} = Mg(-\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{z})$$

$$\vec{N}_A = N_{Az}\,\hat{z} + N_{Ax}\,\hat{x}$$

$$\vec{N}_B = N_{Bz}\,\hat{z} + N_{Bx}\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_P = d\hat{y}\times\vec{N}_B - d\hat{y}\times\vec{N}_A + L\hat{z}\times M\vec{g} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

$$= dN_{Bz}\,\hat{x} - dN_{Bx}\,\hat{z} - dN_{Az}\,\hat{x} + dN_{Ax}\,\hat{z} - MgL\sin\theta\,\hat{y}$$

Igualando $\dot{\vec{l}}_P = \vec{\tau}_P \Rightarrow -M(R^2/2+L^2)\ddot{\theta} = -MgL\sin\theta$ (Componente $\hat{y}$)

Aplicando las condiciones $\theta(0)=0$, $\dot{\theta}(0)=0$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{(R^2/2+L^2)}{gL}\frac{\dot{\theta}^2}{2} = (1-\cos\theta)$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2gL(1-\cos\theta)}{\frac{R^2}{2}+L^2} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

d) De $\dot{\vec{l}}_p = \vec{\tau}_p$

$$\Rightarrow \hat{z}\big]: d(N_{Ax} - N_{Bx}) = 0 \Rightarrow N_{Bx} = N_{Ax} \quad (1)$$

$$\hat{x}\big]: -\dot{\theta} M R^2 \omega = d(N_{Bz} - N_{Az}) \Rightarrow N_{Az} - N_{Bz} = \frac{MR^2\omega}{d}\sqrt{\frac{2gL(1-\cos\theta)}{R^2/2+L^2}} \quad (2)$$

Por otro lado $M\vec{A}_{CM} = \vec{F}_{ext} = \vec{N}_A + \vec{N}_B + M\vec{g}$

Tenemos que $\vec{A}_{CM} = -L\dot{\theta}^2\hat{z} + L\ddot{\theta}\hat{x}$ (aquí $\hat{z} = \hat{\rho}$ y $\hat{x} = -\hat{\theta}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{Ax} + N_{Bx} - Mg\sin\theta = -ML\ddot{\theta} & (3) \\ N_{Az} + N_{Bz} - Mg\cos\theta = -ML\dot{\theta}^2 & (4) \end{cases} \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

$$(1) \text{ y } (3) \Rightarrow N_{Ax} = N_{Bx} = \frac{Mg\sin\theta}{2} - \frac{ML\ddot{\theta}}{2} = \frac{M}{2}\left(g\sin\theta - \frac{gL^2\sin\theta}{(R^2/2+L^2)}\right)$$

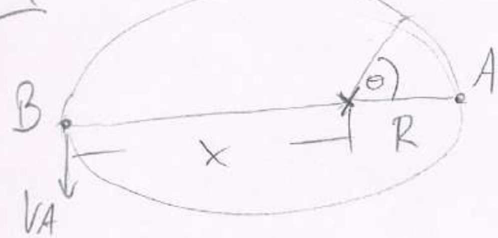
$$= \frac{Mg\sin\theta}{2}\left(1 - \frac{L^2}{R^2/2+L^2}\right) = \frac{Mg}{4}\sin\theta\left(\frac{R^2}{R^2/2+L^2}\right) \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

$$(2)+(4) \Rightarrow N_{Az} = \frac{Mg\cos\theta}{2} - \frac{ML}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{MR^2\omega}{d}\sqrt{\frac{2gL(1-\cos\theta)}{R^2/2+L^2}}$$

$$= \frac{Mg\cos\theta}{2} - \frac{MgL^2}{(R^2/2+L^2)}(1-\cos\theta) + \frac{MR^2\omega}{d}\sqrt{\frac{2gL(1-\cos\theta)}{R^2/2+L^2}}$$

$$N_{Bz} = \frac{Mg\cos\theta}{2} - \frac{MgL^2}{(R^2/2+L^2)}(1-\cos\theta) \quad (0{,}5 \text{ ptos.})$$

P3



$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

$$R = r_{min} = \frac{\alpha}{1+\varepsilon} \Rightarrow \alpha = R(1+\varepsilon)$$

$$r(\theta) = \frac{R(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

En elipses:

$$a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2} = \frac{GMm}{2(-E)} \Rightarrow E_A = -\frac{GMm}{2a}$$

$$E_B = 0 = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{GmM}{x}$$

$$E_A = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$-\frac{\cancel{GMm}}{2a} = \frac{\cancel{GmM}}{x} - \frac{\cancel{GMm}}{R}$$

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{R} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+R} = \frac{1}{R} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x+R} = \frac{x-R}{xR}$$

$$xR = x^2 - R^2$$

$$x^2 - xR - R^2 = 0$$

$$x = \frac{R}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + 4R^2}$$

$$= \frac{R}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} R$$

a) $\Rightarrow x = \frac{R}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ 3ptos

b)

$$\Delta E = \frac{GMm}{2a} = \frac{GMm}{\cancel{2}(x+R)}$$

$$= \frac{GMm}{\cancel{2}R\left(1 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)}$$

1,5 ptos

Parte 2: $T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 a^3}{GM}$

Cerca de la superficie terrestre se tiene que:

$$F = -mg \approx -\frac{GM_T m}{R_T^2} \rightarrow g \approx \frac{M_T G}{R_T^2}$$

$\Rightarrow T^2 = \dfrac{(2\pi)^2 a^3}{g R_T^2}$ buscamos el radio de la órbita que en este caso es "a" (órbita circular)

$$\Rightarrow \boxed{a = \left(\frac{T^2 \cdot g \cdot R_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

1,5 ptos

FI-2001 Mecánica - Sección-1 **Examen 1**

Prof. Gonzalo A. Palma. **Sábado 1 de septiembre, 2018**

Aux's: Javiera Carrasco & Nicolás Valdés **Tiempo: 3 horas**

FCFM, Universidad de Chile

P1: Una partícula de masa m está restringida a deslizar sobre la superficie de un cono de ángulo α. Esta permanece unida al vértice del cono a través de un resorte de constante k y de largo natural ℓ tal como indica la figura. La partícula también está sometida a la fuerza de gravedad.

(a) Determine el Lagrangiano $L = K - U$ del sistema en función de r, $\dot{r}$, ϕ y $\dot{\phi}$ donde r es la distancia de la partícula al eje del cono, y ϕ es el ángulo relativo al eje x (ver figura).

(b) Deduzca las dos ecuaciones de Eüler-Lagrange relacionadas con r y ϕ. Reduzca las ecuaciones a una sola ecuación para r.

(c) Integre la ecuación obtenida en la parte (b) una vez, y deduzca a partir de este resultado que $E = K + U$ es constante.

P2: El sistema de la figura tiene dos resortes de constante elástica k y largo natural D. El extremo izquierdo del primer resorte está sujeto a una pared y el otro extremo a un bloque de masa m. De este bloque surge una cuerda ideal que pasa por una polea para luego bajar verticalmente hasta un segundo resorte idéntico al primero. A su vez, este resorte está conectado a un segundo bloque de masa m. Determine los modos de vibración de este sistema.

P3: Considere un disco de radio R y masa M (homogéneamente distribuida) colocado en forma vertical. El sistema puede girar con roce despreciable alrededor de un eje horizontal que pasa a una distancia $R/2$ del centro del disco (punto $\mathcal{O}$ en la figura). Inicialmente, el disco se encuentra en reposo, sujeto a una cuerda fija al punto Q (ver figura).

(a) Determine el tensor de inercia del disco con respecto al origen $\mathcal{O}$.

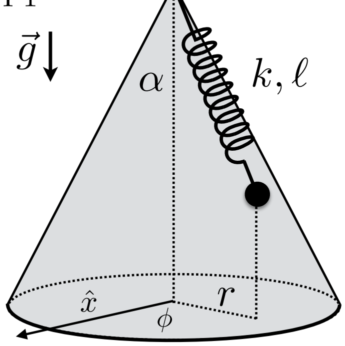
(b) Calcule la tensión de la cuerda.

(c) En $t = 0$ se corta la cuerda. Determine una ecuación de movimiento para el ángulo θ que describe la posición del centro de masas con respecto al eje vertical.

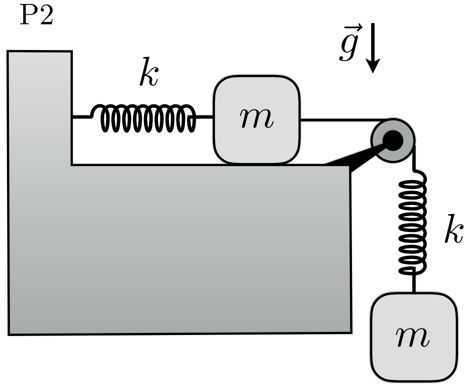
(d) A partir del resultado anterior, obtenga una expresión para la velocidad angular $\dot{\theta}$ en función de θ. Determine la velocidad angular máxima del disco.

(e) Recuerde que $M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_{CM} = \vec{F}^{(\mathrm{ext})}_{\mathrm{tot}}$. A partir de esta ecuación, obtenga una expresión para la fuerza que ejerce el eje $\mathcal{O}$ sobre el disco, en función de θ.

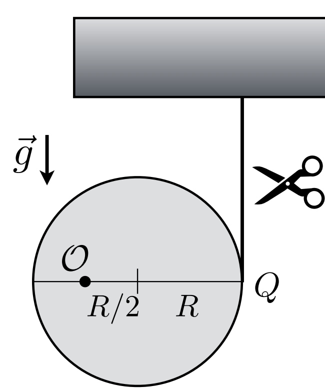
P1



P2



P3



Indicación: Recuerde que el tensor de inercia de un disco con respecto a su centro de masas es una matriz diagonal con componentes $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}MR^2$, $I_{zz} = \frac{1}{2}MR^2$.

Solución P3:

Después de cortar la cuerda, el momentum angular en torno al eje es:

$$\vec{L}_P = I_P \cdot \vec{\Omega} \tag{1}$$

donde $\vec{\Omega} = \hat{z}\dot{\theta}$. El torque es

$$\vec{\tau}_P = Mg\vec{R}_{CM} \times \hat{g}. \tag{2}$$

Tenemos $\vec{R}_{CM} = (R/2)\hat{\rho}$ y $\hat{g} = \hat{\rho}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$. Luego

$$\vec{\tau}_P = Mg(R/2)\hat{\rho} \times (\hat{\rho}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) = -Mg(R/2)\sin\theta\hat{z}. \tag{3}$$

Luego

$$I_z^P\ddot{\theta} + Mg(R/2)\sin\theta = 0. \tag{4}$$

Esto da

$$I_z^P\ddot{\theta} + Mg(R/2)\sin\theta = 0. \tag{5}$$

Luego, dadas las condiciones iniciales:

$$I_z^P\dot{\theta}^2 = MgR\cos\theta. \tag{6}$$

Además, tenemos

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}_{CM} = Mg\hat{g} + \vec{F}. \tag{7}$$

Esto da:

$$\vec{F} = -M^2\frac{R^2}{4I_z^P}g\sin\theta\hat{\theta} - M^2\frac{R^2}{2I_z^P}g\cos\theta\hat{\rho} - Mg(\hat{\rho}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) \tag{8}$$