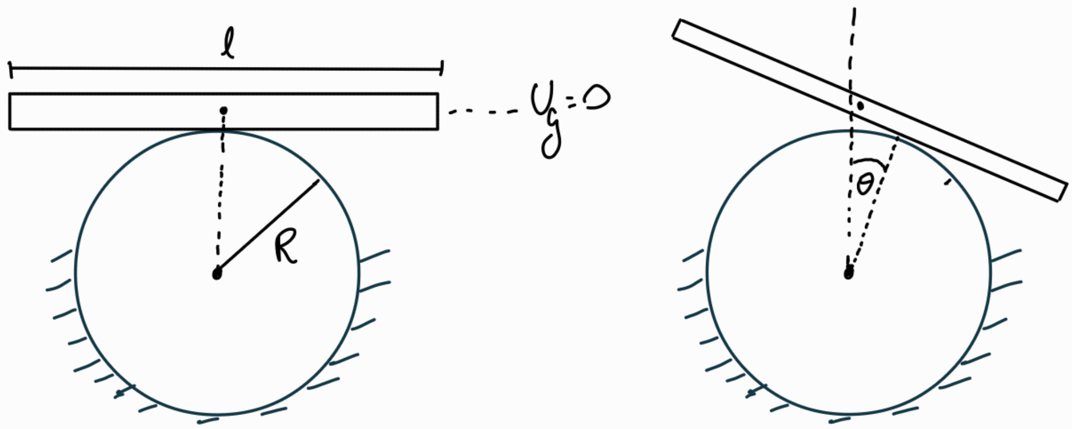
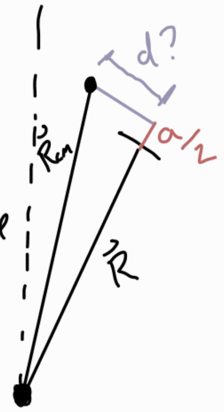
P11



Para sacar la energía basta con describir las posiciones y velocidades del C.M. con respecto a las variables importantes del problema, en este caso θ ya que representa bien la condición del cilindro y la perturbación. Veamos la geometría desde el centro del cilindro:



Rapidamente vemos que $\vec{R}_{cm} = R\hat{r} + \frac{a}{2}\hat{r} + \vec{d}$

$\vec{d}$ va en $-\hat{\theta}$ ya que es la dirección opuesta a donde se abre el ángulo $\hat{\theta}$. Dado que la barra rueda sin resbalar en el cilindro entonces la posición del punto de apoyo cambia un total de $R\theta$ (o el arco de la circunferencia recorrida). Si es una barra con grosor entonces el R va a ser $R+\frac{a}{2}$ con a el grosor de la barra, haganlo ustedes con grosor a ver que tanto cambia. Así $\vec{d} = -R\theta\hat{\theta}$ por lo tanto la posición del centro de masas será:

$$\vec{R}_{cm} = R\hat{r} - R\theta\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\hat{r}) - \frac{d}{dt}(R\theta\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{cm} = R\dot{\theta}\hat{\theta} - R\dot{\theta}\hat{\theta} + R\theta\dot{\theta}\hat{r} = R\theta\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\vec{v}_{cm} = R\theta\dot{\theta}\hat{r}$$

La altura que obtiene será:

$$P^2 = R^2 + R^2\theta^2 \Rightarrow P = R\sqrt{1+\theta^2}$$

$$P = h + R \Rightarrow h = P - R$$

$$\Rightarrow h = R\sqrt{1+\theta^2} - R = R\left(\sqrt{1+\theta^2} - 1\right)$$

así, la energía de rotación $E_\Omega = \frac{1}{2} I_{cm}\dot{\theta}^2$

$$E_\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{12} l^2 \dot{\theta}^2$$

La energía cinética del centro de masas es:

$$E_k = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_{cm}\|^2 = \frac{1}{2} m R^2 \theta^2 \dot{\theta}^2$$

La energía potencial gravitacional será:

$$U_g = mgh = mgR\left(\sqrt{1+\theta^2} - 1\right)$$

$$E = \frac{1}{2} m R^2 \theta^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{12} l^2 \dot{\theta}^2 + mgR\left(\sqrt{1+\theta^2} - 1\right)$$

hacemos pequeñas oscilaciones $\theta << 1$

$$E_K = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left[mR\overset{\text{chiquito}}{\cancel{\theta^2}} + \frac{m}{12}l^2\right]$$

$$E_K \simeq \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\frac{m}{12}l^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$$

$$U_g = mgR\left(\sqrt{1+\theta^2} - 1\right) \simeq mgR\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}\theta^2 \ldots - \cancel{1}\right)$$

$$U_g \simeq mgR \cdot \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\Rightarrow E \simeq \frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2 + mgR \cdot \frac{1}{2} \cdot \theta^2 \; ; \; \frac{dE}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = I_{cm}\dot{\theta}\cdot\ddot{\theta} + mgR\theta\cdot\dot{\theta}$$

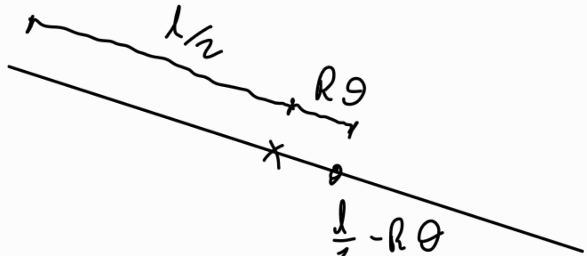
$$0 = \dot{\theta}\left(I_{cm}\ddot{\theta} + mgR\theta\right)$$

$$\Rightarrow I_{cm}\ddot{\theta} + mgR\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR}{I_{cm}}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{mgR}{I_{cm}}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{mgR}{\frac{ml^2}{12}} = \frac{12gR}{l^2} \quad //$$

Ojo! esto es todo medido con el C.M. pero pudimos haber usado el punto de apoyo para la energía de movimiento, este tiene $v=0$ de traslación pero la inercia cambia en cada θ



$$I = \int_{-(\frac{l}{2}+R\theta)}^{\frac{l}{2}-R\theta} x'^2 \lambda \, dx' = \frac{x'^3}{3}\Big|_{-(\frac{l}{2}+R\theta)}^{\frac{l}{2}-R\theta} \lambda = \frac{\lambda}{3}\left[\left(\frac{l}{2}-R\theta\right)^3+\left(\frac{l}{2}+R\theta\right)^3\right]$$

$$I = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{l^3}{8} - \cancel{3\frac{l^2}{4}R\theta} + 3\frac{l}{2}R^2\theta^2 - \cancel{R^3\theta^3}\right.$$
$$\left. \frac{l^3}{8} + \cancel{3\frac{l^2}{4}R\theta} + 3\frac{l}{2}R^2\theta^2 + \cancel{R^3\theta^3}\right]$$

$$I = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{l^3}{4} + 6\frac{l}{2}R^2\theta^2\right] = \frac{\lambda}{3}\left[\frac{l^3}{4} + 3lR^2\theta^2\right]$$

//

o mas inteligente, usamos teorema de ejes paralelos:

$$I = \frac{\lambda}{12} l^3 + \lambda l \|\vec{R}_{CM_I}\|^2 = \frac{\lambda l^3}{3 \cdot 4} + \lambda l R^2 \theta^2$$

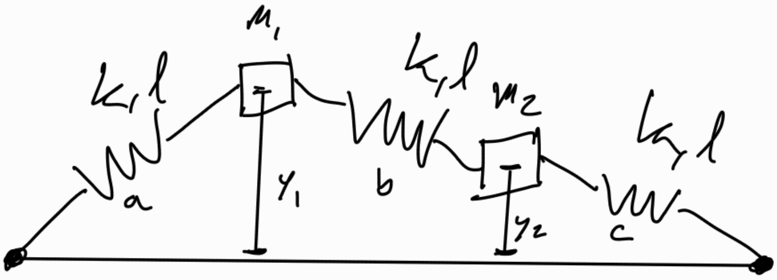
$$I = \frac{\lambda l}{12}\left[l^2 + 12 R^2 \theta^2\right] \quad //$$ lo mismo

así, la energía total es:

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgh = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{12} l^2 + R^2\theta^2\right)\dot{\theta}^2 + mgh$$

lo mismo de antes, el término de traslación apareció solito con la rotación nueva.

P2|



$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 \quad ; \quad K_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

$$U_a = \frac{1}{2} k \Delta^2 = \frac{1}{2} k \left(l^2 + y_1^2\right)$$

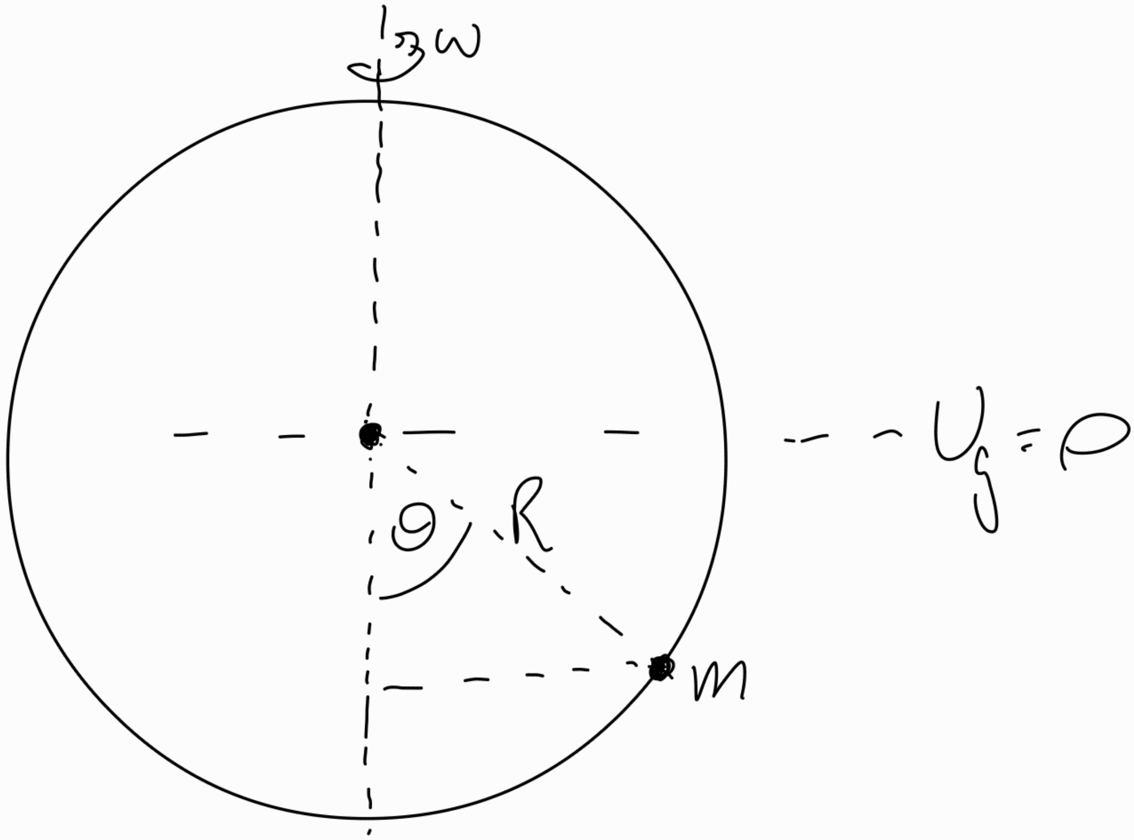
$$U_b = \frac{1}{2} k \Delta^2 = \frac{1}{2} k \left(l^2 + (y_1 - y_2)^2\right)$$

$$U_c = \frac{1}{2} k \delta^2 = \frac{1}{2} k (l^2 + y_2^2)$$

$$E_1 = K_1 + U_a + U_b \; ; \; \frac{dE_1}{dt} = 0$$

$$m_1 \dot{y}_1 \ddot{y}_1 + k y_1 \dot{y}_1 + k(y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$
$$+ m_2 \dot{y}_2 \ddot{y}_2 + k y_2 \dot{y}_2 = 0$$

<u>P31</u>



$$\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta} + R\sin\theta\,\omega\,\hat{\phi}$$

$$\|\vec{v}\|^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\omega^2\right)$$

$$U_g = -mgR\cos\theta$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\,\omega^2\right) - mgR\cos\theta$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\,\omega^2 + mgR\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$mR^2\ddot{\theta} + mR^2\sin\theta\cos\theta\,\omega^2 + mgR\sin\theta = 0$$

$$R\ddot{\theta} + R\omega^2\cos\theta\sin\theta + g\sin\theta = 0$$

$$R\ddot{\theta} = \sin\theta\left(-\omega^2 R\cos\theta - g\right)$$

es correcto? No! falta considerar el trabajo de la Normal en $\hat{\phi}$!

$$N_\phi = 2mR\dot{\theta}\omega\sin\theta$$

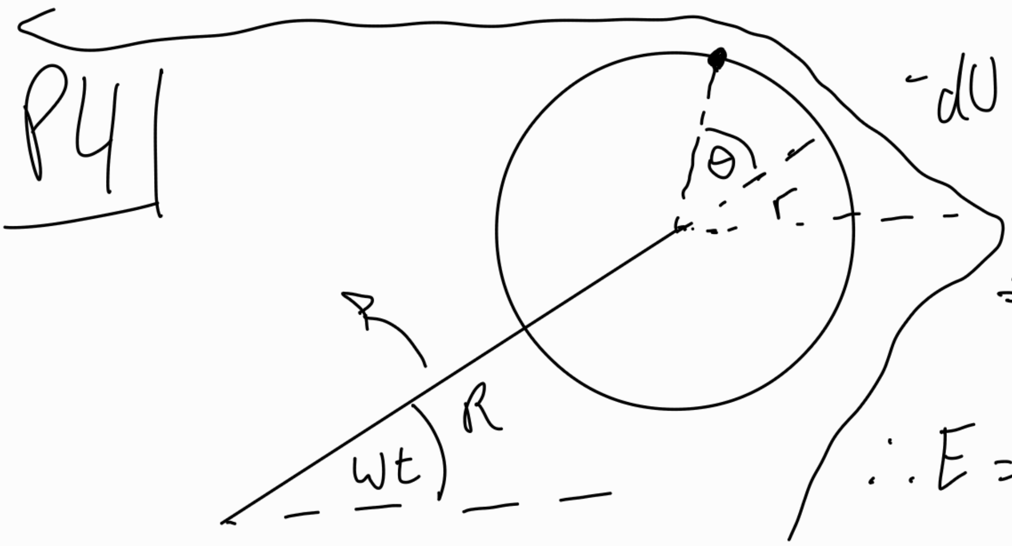
$$-dU = \vec{N}_\phi \cdot d\vec{r} = 2mR^2\dot{\theta}\,\omega\sin\theta\cos\theta\,dt$$

$$= 2mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \exists\, U = U_{ref} - mR^2\omega^2\sin^2\theta$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - mgR\cos\theta$$

P41



$$(x,y) = \left(R\cos\omega t + r\cos(\omega t+\theta),\ R\sin\omega t + r\sin(\omega t+\theta)\right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \left(-R\omega\sin(\omega t) - r(\omega+\dot{\theta})\sin(\omega t+\theta)\right.$$
$$\left. + R\omega\cos(\omega t) + r(\omega+\dot{\theta})\cos(\omega t+\theta)\right)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = R^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot{\theta})^2$$
$$+2Rr\omega(\omega+\dot{\theta})\left(\cos\omega t\cos(\omega t+\theta) + \sin\omega t \cdot \sin(\omega t+\theta)\right)$$

recordando que

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

tonces el ultimo termino no es mas que

$$\cos(\omega t-\omega t-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\|\vec{v}\| = R^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot{\theta})^2 + 2Rr\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta$$

no hay energía potencial

$$\Rightarrow E = K = \frac{1}{2}m\left(R^2\omega^2 + r^2(\omega+\dot{\theta})^2 + 2Rr\omega(\omega+\dot{\theta})\cdot\cos\theta\right)$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 = mr^2(\omega+\dot{\theta})\ddot{\theta} - 2R\cancel{r}\omega(\omega+\dot{\theta})\sin\theta\dot{\theta}$$
$$+2R\cancel{r}\omega\ddot{\theta}\sin\theta\dot{\theta}$$

$$mr\ddot{\theta}(\omega+\dot{\theta})-2R(\omega+\dot{\theta})\sin\theta\dot{\theta}+2R\omega\sin\theta\dot{\theta}\ddot{\theta}=0$$

¿y esto de que sirve?