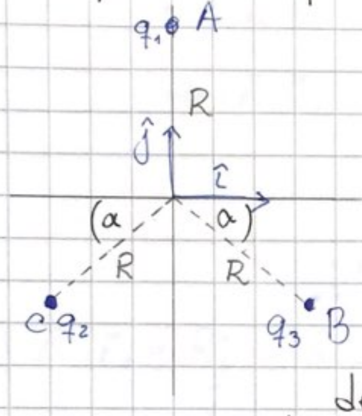
Auxiliar 1

Campo eléctrico

P1 a) Usamos el ppio. de superposición, que nos dice que si tenemos más de una fuente: el campo eléctrico total es igual a la suma de los campos producidos por cada fuente



Sabemos que los cpos. producidos por una carga puntual es

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Usando el origen de nuestro sist. de coordenadas cartesiano en el centro de la figura, identificamos la posición de cada carga

$$\vec{r}_1 = R\hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_2 = R(-\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j}) \; ;$$

$$\vec{r}_3 = R(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j})$$

Y tenemos que la distancia de $\vec{r}=\vec{0}$ a cada partícula es la misma

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = |-\vec{r}_i| = |\vec{r}_i| = R,$$

por lo que los 3 cpos. eléc. $\vec{E}_i(\vec{r}=0)$ serían:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R^2}\hat{j} \; ; \; \vec{E}_2 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{2R^2}(-\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j}) \; ;$$

$$\vec{E}_3 = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{2R^2}(\cos\alpha\,\hat{\imath} - \sin\alpha\,\hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{TOT}(\vec{r}=\vec{0}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{R^2}(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

b) Ahora, nuestro punto de interés es $\vec{r} = \vec{r}_1 = R\hat{j}$, así que hacemos algo similar, solo que ya no se considera $\vec{E}_1$ (no hay autointeracción)

Tenemos

▷ $\vec{r} - \vec{r}_2 = R\hat{j} - (-R\cos\alpha\,\hat{\imath} - R\sin\alpha\,\hat{j})$

$$= R\cos\alpha\,\hat{\imath} + R(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_2| = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2 + 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{2R^2 + 2R^2\sin\alpha}$$

$$= R\sqrt{2+2\sin\alpha} \overset{\text{definimos}}{\equiv} d$$

▷ $\vec{r} - \vec{r}_3 = R\hat{j} - (R\cos\alpha\,\hat{\imath} - R\sin\alpha\,\hat{j})$

$$= -R\cos\alpha\,\hat{\imath} + R(1+\sin\alpha)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}_3| = |\vec{r} - \vec{r}_2| = R\sqrt{2+2\sin\alpha} = d$$

Así que el cpo. eléc. producido en $\vec{r}_1$ es

$$\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_1) = \sum_{i\in\{2,3\}} \vec{E}_i(\vec{r}_1) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0\, 2\,(1+\sin\alpha)\hat{j}}{2R^2(2+2\sin\alpha)^{3/2}}$$

y la fuerza

$$\vec{F}_1 = q_0\,\vec{E}_{TOT}(\vec{r}_1) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0^2}{2R^2}\frac{1}{(2+2\sin\alpha)^{1/2}}\hat{j}$$

* Notamos que en ambos items se cancelan las ~~const~~ contribuciones en la horizontal, por simetría

$\boxed{P_2}$ Estamos frente a un problema de carga continua, por lo que debemos hacer uso de la expresión integral del cpo. eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,ds',$$

identificamos cada parte

- $\sigma(\vec{r}\,') = \sigma_0 \cos\theta'$
- $\vec{r}-\vec{r}\,' = \vec{0} - R\hat{r} = -R\hat{r}\,'$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = R$
- $ds' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$

Reemplazamos

$$\vec{E}(\vec{r}=\vec{0}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sigma_0\cos\theta' \cdot (-R\hat{r}\,')}{R^3} R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

Impotante notar que no podemos integrar así, ya que $\hat{r}$ es función de los ángulos

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta,\phi),\ \text{explícitamente}$$

$$\hat{r} = \cos\phi\sin\theta\,\hat{\imath} + \sin\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$$

reemplazamos

son 0 las integrales en θ'

$$\vec{E}(\vec{r}=0) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_0\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big[\cancel{\cos\theta'\sin\theta'}\cos\phi'\sin\theta'\,\hat{\imath}'\,d\theta' d\phi' + \cancel{\cos\theta'\sin\theta'}\sin\phi'\sin\theta'\,\hat{\jmath}'\,d\theta' d\phi' + \underbrace{\cos\theta'\sin\theta'\cos\theta'\,\hat{k}'\,d\theta' d\phi'}_{2\pi\cdot\frac{2}{3}}\Big]$$

$$= \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma_0 \frac{4\pi}{3}\hat{k}' = -\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}'$$

nuevamente se cancela la horizontal por simetría

$\boxed{P_3}$ En electromagnetismo podemos calcular campos de objetos "bastante complicados" cuando usamos la expresión integral del cpo. eléc.. Sin embargo, nos podemos ayudar del ppio. de superposición cuando debemos "sacarle partes" al objeto de interés (la fuente)

En este problema debemos "sacarle" un cilindro a una esfera cargada. Lo que haremos será calcular el cpo. del cilindro (que aproximamos como un alambre) y de la esfera, por separado

Campo de la esfera

Es sencillo, ya que fuera de la esfera esta se comporta como una carga puntual en $\vec{r} = \vec{0}$ de carga

$$q = \int_V \rho \, dv = \rho \underbrace{\int_V dv}_{\text{volumen esfera}} = \rho \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{esf} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a\sqrt{3})^{3}} \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot a\sqrt{3}\,\hat{j}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon} \frac{a}{3}\hat{j} = \frac{\rho \cdot a}{9\varepsilon_0}\hat{j}$$

Campo del alambre

Para usar el ppio. de superposición debemos elegir la densidad de carga del alambre tq. se contrarreste con la densidad de carga de la esfera.

Considerando nuestro cilindro muy fino, su densidad de carga debe ser

$$2a\lambda = \overbrace{\pi b^2 \cdot 2a}^{\text{volumen cilindro}} \cdot (-\rho)$$

*No podemos hacer $\lambda = -\rho$, está mal dimensionalmente

$$\Leftrightarrow \lambda = -\rho\pi b^2$$

Calculemos el cpo. de este alambre con la fórmula integral

$$\vec{E}_{alam} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda(r')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,dl'$$

Identificamos las partes

- $\lambda(r') = -\rho\pi b^2$
- $\vec{r}-\vec{r}' = a\sqrt{3}\,\hat{j} - z'\hat{k}'$
- $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{a^2\cdot 3 + z'^2}$

Reemplazamos

$$\Rightarrow \vec{E}_{alam} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{\rho\pi b^2(a\sqrt{3}\hat{j} - \overset{impar}{\cancel{z'\hat{k}'}})}{\underbrace{(\sqrt{3a^2+z'^2})^3}_{par}}dz'$$

$$= \frac{-\rho b^2 a\sqrt{3}}{4\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dz'}{(3a^2+z'^2)^{3/2}}\,\hat{j}$$

Hacemos el c.v. $z' = a\sqrt{3}\tan u$

$$\Rightarrow dz' = a\sqrt{3}\sec^2 u\,du$$

$$I: \int\frac{a\sqrt{3}\sec^2 u\,du}{(3a^2+3a^2\tan^2 u)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{\sec^2 u\,du}{(1+\tan^2 u)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{3a^2}\int\frac{\sec^2 u\,du}{(\sec^2 u)^{3/2}} = \frac{1}{3a^2}\int\cos u\,du$$

$$= \frac{1}{3a^2}\sin u\Big|_{u_-}^{u_+}$$

donde como $u = \arctan\left(\frac{z'}{a\sqrt{3}}\right)$

$$\Rightarrow I: \frac{1}{3a^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{z'}{a\sqrt{3}}\right)\right)\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{1}{3a^2} \frac{z'}{a\sqrt{3}\sqrt{\frac{z'^2}{3a^2}+1}}\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2a}{3\sqrt{3}a^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{3a^2}+1}}$$

$$= \frac{2}{3\sqrt{3}a^2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{alam} = -\frac{\rho b^2 a\sqrt{3}}{4\varepsilon_0}\frac{1}{3a^2}\hat{j}$$

$$= -\frac{\rho b^2\sqrt{3}}{12a\varepsilon_0}\hat{j}$$

Usando ppio. superpos.

$$\vec{E}_{TOT} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{\rho \cdot a}{9\varepsilon_0}\hat{j} - \frac{\rho b^2\sqrt{3}}{12a\varepsilon_0}\hat{j}$$