Auxiliar 2

Antonia Cisternas.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \int \nabla \cdot \vec{E}\, dV = \boxed{\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \phi_s}$$

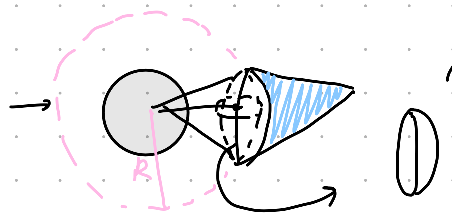
Ley de Gauss

ϕ_s: Flujo a través de s.

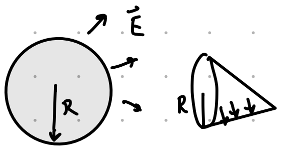
$*\ d\vec{s} = ds \cdot \hat{n}$

P1

$$\vec{F} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$



sacar el flujo sobre la base del cono es igual a sacar el flujo sobre este casquete ya que $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ es un prod. punto y aunque sea + área, las componentes perpendiculares se cancelan.



→ Como no hay carga dentro del cono, el flujo va a ser 0 si encerramos el cono.

↳ flujo que entra por la tapa es igual al que sale por el manto.

Qenc

la densidad de carga llega hasta R

$$Q_{enc} = \int dq = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0 \frac{r}{R} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi.$$

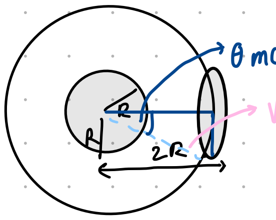
$$= \frac{\rho_0}{R} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{-\cos\theta \big|_0^{\pi} = 2} \underbrace{\int_0^{R} r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}}$$

$$= \frac{\cancel{4}\pi \rho_0}{\cancel{R}} \cdot \frac{R^{\cancel{4}3}}{\cancel{4}}$$

$$\boxed{Q_{enc} = R^3 \pi \rho_0}$$

· Flujo esfera virtual : $F_{esf.\,virt} = \dfrac{\pi \rho_0 R^3}{\varepsilon_0}$

· El flujo que nos piden es $\boxed{F = F_{esf.\,virt} \cdot \dfrac{A_{fracø\ casquete}}{A_{esfera\ virt.}}}$

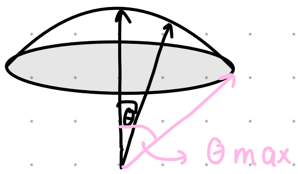


$\sqrt{R^2 + 4R^2} = \sqrt{5}\,R$ = Radio esf. virtual.

→ $A_{esf.\ virt.} = 4\pi\,(R\sqrt{5})^2 = 20\,\pi R^2$

área de la esfera: $4\pi r^2$

→ para sacar $A_{frac.\ casquete}$:



$\theta \in [0, \theta_{max}]$
$\phi \in [0, 2\pi]$
$r = R\sqrt{5}$.

$$A_{\substack{fracø \\ casquete}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_{max}} (R\sqrt{5})^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad , \quad dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$A_{\substack{fracø \\ casq.}} = 5R^2 2\pi \underbrace{\int_0^{\arccos(2/\sqrt{5})} \sin\theta \, d\theta}_{-\cos\theta \Big|_0^{\arccos(2/\sqrt{5})} \; = \; -2/\sqrt{5} + 1}$$

$$\cos\theta_{max} = \frac{2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$A_{\substack{fracø \\ casq}} = 10\pi R^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

→ $\vec{F} = \dfrac{\pi \rho_0 R^3}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\cancel{10}\,\cancel{\pi}\,\cancel{R^2}}{\cancel{20}_{\,2}\,\cancel{\pi}\,\cancel{R^2}}\,(1 - 2/\sqrt{5}) \longrightarrow \boxed{\vec{F} = \dfrac{\pi \rho_0 R^3}{2\,\varepsilon_0}\,(1 - 2/\sqrt{5}).}$

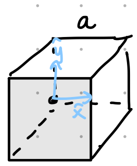
P2

ⓐ La ley de Gauss nos dice que:

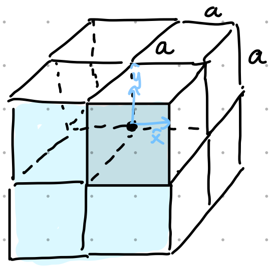
$$\phi_S = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\downarrow$

Flujo a través de la superficie S.



Podemos crear un gran cubo compuesto por 8 cubos como el anterior que tenga la carga en el centro de todos ellos.



Se sabe gracias a la ley de Gauss que el flujo en toda la superficie del cubo de lado $2a$ es:

$$\phi_{cubo} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Luego, este flujo lo dividimos en las 6 caras del cubo para sacar el flujo por la superficie cuadrada de lado $2a$:

$$\phi_{cuad.2a} = \frac{q}{6\,\varepsilon_0}$$

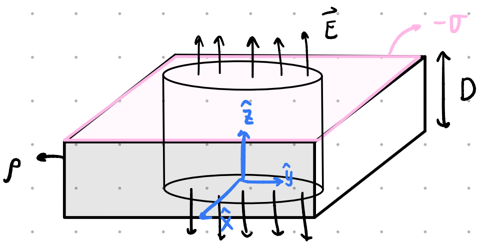
Por úlimo, dividimos en 4 para sacar el flujo en el cuadrado de lado a:

$$\phi_{cuad.\,a} = \frac{q}{4 \cdot 6 \cdot \varepsilon_0} = \boxed{\frac{q}{24\,\varepsilon_0}} = \frac{q}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\,[\text{farad/mt}] \cdot 24} = \boxed{\frac{10^{12} \cdot q}{212{,}4}\left[\frac{Nm^2}{C}\right] = \phi_{cuad.\,a}} \,//$$

P3

ⓐ

- Sacaremos el campo que genera el bloque. Luego, gracias al principio de superposición, le sumaremos el campo que genera la placa.



$\rightarrow$ Densidades de carga uniformes: No dependen de la posición.

$\rightarrow$ Como es un bloque infinito, por simetrías del problema el campo será $\vec{E}_1 = E_1(z)\,\hat{k}$ $\longrightarrow$ En un punto arriba.

$\vec{E}_1 = -E_1(z)\,\hat{k}$ $\longrightarrow$ En un punto abajo.

$$(*)\ \int \vec{E}_1\cdot d\vec{s} = \int_{S_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \int_{S_2}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \int_{S_3}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$*\ \rho = \frac{\text{carga}}{\text{volumen}}$

$\rightarrow \rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow \rho\, dv = dq$

① Q_{enc}

$$\rightarrow Q_\rho = \int_0^D\int_0^{2\pi}\int_0^r (+\rho)\cdot \rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \rho\pi\cdot r^2\cdot D$$

② $\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$

$$\rightarrow \int_{S_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} = \iint E_1\cancel{\hat{k}}\cdot ds\cancel{\hat{k}} = E_1\int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\, d\rho\, d\phi = \boxed{E_1(z)\, r^2\pi}$$

sólo en los casos en que E no depende de ρ ni ϕ

$$\rightarrow \int_{S_2}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} = \iint \underbrace{-E_1}_{\text{es el campo que atraviesa la superficie!}}\cancel{\hat{k}}\cdot ds\cdot -\cancel{\hat{k}} = \boxed{E_1(z)\pi r^2}$$

$$\rightarrow \int_{S_3}\vec{E}_1\cdot d\vec{s} = 0 \text{ ya que } \vec{E}_1\cdot d\vec{s} = E_1\cdot \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{\rho}}_{0}\cdot ds = 0.$$

volviendo a $(*)$:

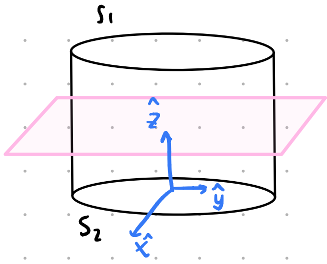
$$\int \vec{E}_1\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\cancel{\pi}E_1\cancel{r^2} = \frac{\rho\cancel{\pi}\cancel{r^2}D}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

Ahora para la placa:

$\vec{E}_2 = E_2(z)\,\hat{k} \longrightarrow$ en un punto arriba.

$\vec{E}_2 = -E_2(z)\,\hat{k} \longrightarrow$ en un punto abajo.



① Q_{enc}

$$\rightarrow Q_\sigma = \int dq = \iint (-\sigma)\cdot ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^r (-\sigma)\cdot \rho\, d\rho\, d\phi = -\sigma\, 2\pi\cdot\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r = -\sigma\,\pi r^2$$

② $\int \vec{E}\cdot ds$ Al igual que la anterior

$$\rightarrow \int_{S_1} \vec{E}_2\cdot d\vec{s} = \iint E_2 \cancel{\hat{k}}\cdot ds\, \cancel{\hat{k}} = E_2 \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\phi = E_2(z)\, r^2\pi$$

no depende de ρ ni ϕ!

$$\rightarrow \int_{S_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{s} = \iint -E_2 \cancel{\hat{k}}\cdot ds\cdot -\cancel{\hat{k}} = E_2(z)\pi r^2$$

$$\rightarrow \int_{S_3} \vec{E}_2\cdot d\vec{s} = 0$$

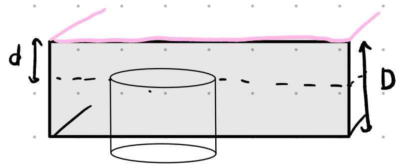
(*) $$\int \vec{E}_2\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E_2 \cancel{r^2\pi} = -\frac{\sigma \cancel{\pi r^2}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

Así, el campo para un punto h encima de la placa será:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(\frac{\rho D}{2\varepsilon} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{k}}$$

→ El campo no depende de z.

ⓑ ① Qenc



$$\rightarrow Q_p = \int_0^{D-d}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} (+\rho)\cdot \rho\, d\rho\, d\phi = \frac{\rho\pi r^2(D-d)}{\varepsilon_0}$$

② $\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$ Generado por el bloque:

$$\int_{S_1} E(z=D-d)\cdot ds = E(z=D-d)\int ds = E(z=D-d)\cdot \pi r^2$$

$$\int_{S_2} E(z<0)\cdot -\cancel{\hat{k}}\cdot -\cancel{\hat{k}}\, ds = E(z<0)\,\pi r^2$$

$$\Rightarrow \Big(E(z=D-d) + \underbrace{E(z<0)}_{\frac{\rho D}{2\varepsilon_0}}\Big)\cancel{\pi r^2} = \frac{2\rho\cancel{\pi r^2}(D-d)}{2\varepsilon_0} \Rightarrow E(z=D-d) = \frac{2\rho(D-d)}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}_1(z=D-d) = \frac{\rho(D-2d)}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

Generado por la placa:

$$\boxed{\vec{E}_2(z=D-d) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}}$$

Así, el campo para un punto d bajo la placa:

$$\boxed{\vec{E}(z=D-d) = \left(\frac{\rho(D-2d)}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\hat{k}}$$ //

(c) Es análoga al punto (a) pero en este caso, el campo estará en sentido contrario. Como el campo no depende de z, la distancia H no afecta.

Así, para un punto bajo el bloque:

$\vec{E}_1 = -E_1 \hat{k}$

$\vec{E}_2 = -E_2 \hat{k}$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\rho D}{2\epsilon}\right)\hat{k}}$$