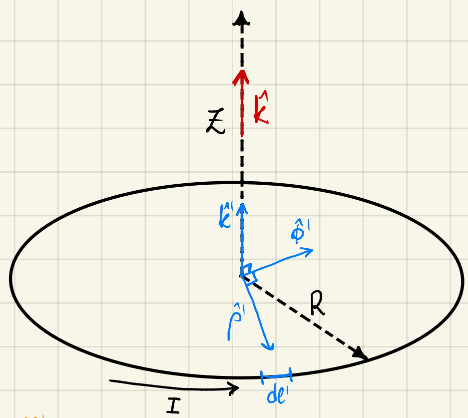
Auxiliar Extra C2

P1

Usamos un sistema de coordenadas cilíndrico para calcular el campo magnético con Biot-Savart, en este caso tenemos una corriente de línea, entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,dl' \qquad (1)$$

donde $\vec{r}\,'$ nos indica la posición de la corriente que integramos en la línea l'. Identificamos cada parte por separado



- $\vec{r} = z\hat{k}$
- $\vec{r}\,' = \rho'\hat{\rho}' + \overset{z'=0}{\cancel{z'}}\hat{k}' = R\hat{\rho}'$, ya que solo tenemos corriente a una distancia $\rho' = R$ y en $z' = 0$
- $\vec{r} - \vec{r}\,' = z\hat{k} - R\hat{\rho}'$
- $\vec{I}(\vec{r}\,') = I\hat{\phi}'$, la corriente es homogénea
- $dl' = \rho' d\phi' = R\,d\phi'$, donde $\phi \in (0, 2\pi]$

Reemplacemos en (1)

$$\Rightarrow \vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\hat{\phi}'\times(z\hat{k} - R\hat{\rho}')}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,R\,d\phi'$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left[z\int_0^{2\pi}\hat{\rho}'\,d\phi' + R\int_0^{2\pi}\hat{k}'\,d\phi'\right]$$

$\hat{k} = \hat{k}'$

Recordamos que $\hat{k}' = \hat{k}$ no depende de la coordenada ϕ', pero $\hat{\rho}'$ si

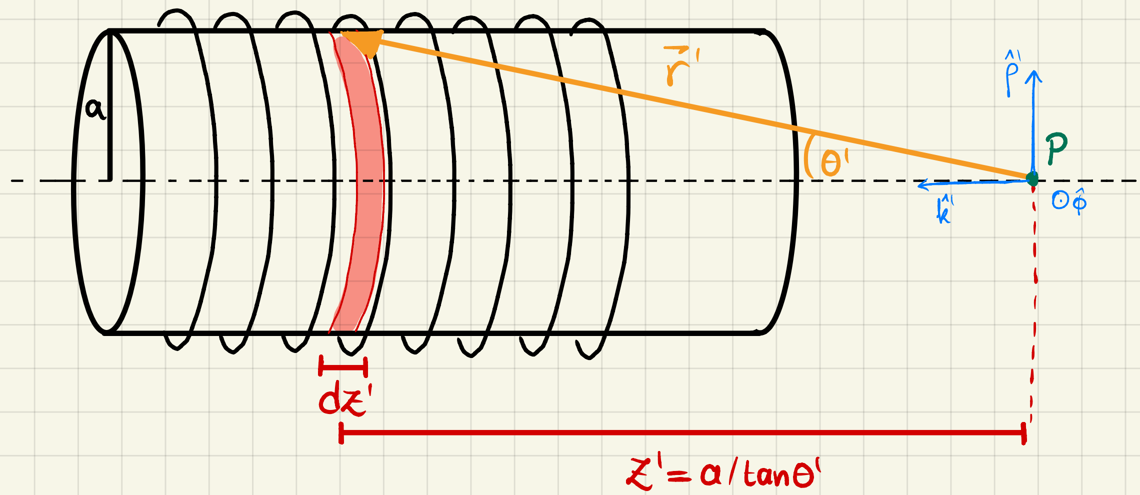
$$\hat{\rho}' = \cos\phi'\,\hat{\imath} + \sin\phi'\,\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(z\hat{k}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(z^2+R^2)^{3/2}}\left[z\int_0^{2\pi}\left(\overset{\int\cos\phi=0}{\cancel{\cos\phi'\,\hat{\imath}}} + \overset{\int\sin\phi=0}{\cancel{\sin\phi'\,\hat{\jmath}}}\right)d\phi' + 2\pi R\,\hat{k}'\right]$$

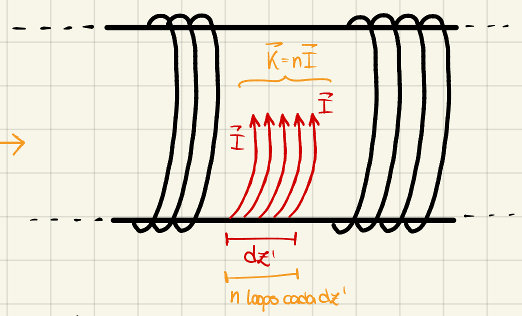
$\hat{k} = \hat{k}'$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\hat{k}$$

P2



El campo magnético en P puede ser calculado ocupando Ley de Ampere (y un par de argumentos físicos), pero ahora lo calcularemos con Biot-Savart donde tenemos una corriente lineal, pero como las vueltas del alambre están tan juntas, podemos considerar una densidad de corriente superficial dada por $K = I \cdot n$



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\,da'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \quad (1)$$

identificamos cada parte de (1)

▹ $\vec{r} = \vec{0}$ ▹ $\vec{r}\,' = \rho'\hat{\rho}' + z'\hat{k} = a\hat{\rho}' + a/\tan(\theta')\hat{k}'$

▹ $\vec{r} - \vec{r}\,' = -a\hat{\rho}' - a/\tan\theta'\,\hat{k}' \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = (a^2 + a^2/\tan^2\theta')^{3/2} = a^3/\sin^3\theta'$

▹ $\vec{K}(\vec{r}\,') = In\,\hat{\phi}'$, el sentido de $\vec{K}$ está dado por el signo de I

▹ $da' = \rho' d\phi' dz' = a\,d\phi' \cdot \left(-\frac{a}{\sin^2\theta'}\,d\theta'\right) = -a^2 d\phi' \frac{d\theta'}{\sin^2\theta'}$, donde $\phi' \in (0, 2\pi]$ y $\theta' \in [\theta_1, \theta_2]$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\Big[\overbrace{In\,\hat{\phi}'}^{\vec{K}} \times \overbrace{(-a\hat{\rho}' - a/\tan\theta'\,\hat{k}')}^{\vec{r}-\vec{r}\,'}\Big]\overbrace{\frac{\sin^{\cancel{3}\,1}\theta'}{a^{\cancel{3}\,1}}}^{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-3/2}} \cdot \overbrace{\left(-\cancel{a^2}\,d\phi'\frac{d\theta'}{\cancel{\sin^2\theta'}}\right)}^{da'}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{In}{a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\hat{\phi}' \times (a\hat{\rho}' + a/\tan\theta'\,\hat{k})\sin\theta'\,d\phi' d\theta'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} In\left[-\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\hat{k}'\sin\theta'\,d\phi' d\theta' + \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{\rho}'}{\tan\theta'}\,d\phi' d\theta'\right]$$

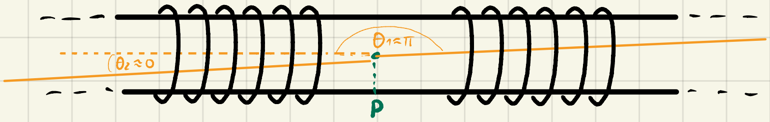
al igual que en el problema anterior, la segunda integral se anula al pasar $\hat{\rho}'$ a cartesianas. Por lo que nos queda

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} In \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{k}'$$

$$= \frac{\mu_0}{2} In \cos\theta' \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \hat{k}' = \frac{\mu_0}{2} In(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\hat{k}$$

Ahora, si consideramos el solenoide infinito, digamos que nuestro punto P está "justo al medio" de este cilindro infinito, nuestro ángulo inicial de integración θ_1 sería $\theta_1 = \pi$ y $\theta_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{0}) = \frac{\mu_0}{2} In(1+1)\hat{k} = \mu_0 In\hat{k}$$



sin embargo, en un cilindro infinito todos los puntos serían "justo al medio) del solenoide y como $a \ll \infty$, entonces en todas partes al interior de un solenoide infinito el campo valdría

$$\vec{B} = \mu_0 In\hat{k}$$