Magnetización en la materia

Vector magnetización

$\vec{M}$ = magnitud vectorial definida como el momento dipolar magnético del material x unidad de volumen.

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} = n\vec{\mu}}$$

n: átomos o moléculas por unidad de volumen.

$\vec{\mu}$: momento dipolar inducido x átomo o molécula.

vector intensidad magnética

$\vec{H}$ = campo magnetizante

↳ campo externo aplicado sobre el material.

$\boxed{\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})}$ → Relaciona campo magnético externo con magnetización del material.

↓ en medio lineal

$\boxed{\vec{B} = \mu\vec{H}}$, μ: Permeabilidad magnética del material.

$\boxed{\vec{M} = \chi\vec{H}}$, χ: suceptibilidad magnética.

* μ_0 = permeabilidad magnética del vacío.

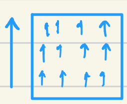
$\boxed{\mu = \mu_0(1+\chi)}$

$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi\vec{H}) = \mu_0(1+\chi)\vec{H}$

Materiales:

→ Ante un campo externo:

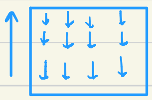
Paramagnéticos



$\chi > 0$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} > 1$

$\Rightarrow \mu > \mu_0$

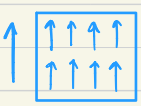
Diamagnéticos



$\chi < 0$, $\mu_r < 1$

$\Rightarrow \mu < \mu_0$

Ferromagnéticos



sin campo externo queda igual.

$\chi \gg 0$, $\mu_r \gg 1$

$\Rightarrow \mu \gg \mu_0$

Ley de Ampère Generalizada $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{libre}$.

$$\nabla \times \vec{H} = J_{libre}.$$

Condiciones de Borde: $B_{1n} = B_{2n}$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = K_{libre}$$

→ Densidad superficial de corriente de magnetización: $\vec{K}_m = \vec{M} \times \hat{n}$

→ " volumétrica " " " " : $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$.

AUXILIAR 10 + 1

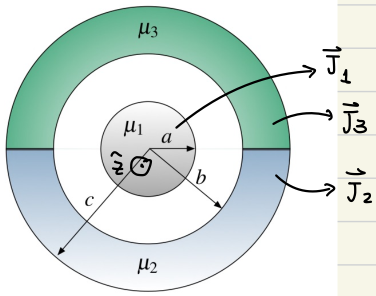
Problema 14.7

Por el interior de un cilindro infinito de radio a y permeabilidad magnética μ_1, circula una corriente I_0 en la dirección $\hat{z}$. A este cilindro lo rodea un casquete cilíndrico de radio interno b y radio externo c. El casquete consiste en dos mitades, de permeabilidad μ_2 y μ_3 respectivamente (ver figura). Por el casquete circula la misma cantidad de corriente I_0 pero en sentido opuesto al del cilindro interno (es decir, en la dirección $\hat{z}$). Asuma que las densidades de corriente al interior de estos materiales es homogénea.

a) Encuentre una expresión para la corriente total $I(r)$ que atraviesa una superficie circular de radio r arbitrario, concéntrica a los cilindros.

b) Encuentre la intensidad magnética $\vec{H}$ y el campo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio.

c) Determine el valor de las corrientes superficiales $\vec{K}_M$ inducidas por la magnetización $\vec{M}$ de los medios, en cada una de las superficies.



(a) Evaluaremos la corriente para cada intervalo:

$\vec{J} = J(r)\,\hat{k}$ → simetrías del problema.

Teniendo I_0, calculamos $\vec{J}_1$:

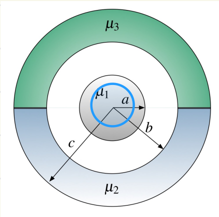
$$\rightarrow \quad I_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} J_1(r)\,\hat{k}\cdot r\,dr\,d\theta\,\hat{k} = J_1(r)\cdot\pi a^2$$

$$\rightarrow \quad \vec{J}_1 = \frac{I_0}{\pi a^2}\cdot\hat{k}$$

* densidades de corriente homogéneas: $\vec{J}_2 = \vec{J}_3$.

$$\rightarrow \quad -I_0 = \int_0^{2\pi}\int_b^{c} J_2(r)\cdot r\,dr\,d\theta = J_1(r)\,\pi\,(c^2-b^2).$$

$$\rightarrow \quad \vec{J}_2 = \frac{-I_0}{\pi(c^2-b^2)}\,\hat{k}$$



$r < a$

$$I(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \vec{J}_1(r)\,d\vec{S} = \frac{I_0}{\cancel{\pi} a^2}\cdot\cancel{2\pi}\cdot\frac{r^2}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{I_0 r^2}{a^2}}$$

$a < r < b$

Corriente que atraviesa: $\boxed{I_0}$

$b < r < c$

$$I(r) = I_0 + \int_0^{2\pi}\int_b^{r} \vec{J}_2\cdot d\vec{S} = I_0 + -\frac{I_0}{\cancel{\pi}(c^2-b^2)}\cdot\cancel{2\pi}\,\frac{r^2}{\cancel{2}} = \boxed{I_0 - \frac{I_0(r^2-b^2)}{c^2-b^2}}$$

$c < r$

Corriente que atraviesa: $I_0 + -I_0 = \boxed{0}$ ✓

ⓑ Utilizando ley de Ampère generalizada:

$$\int \vec{H}\, d\vec{l} = I_{libre}.$$

↳ calculado anteriormente.

∗ utilizando regla de la mano derecha, notamos que $\vec{B} = B(r)\hat{\theta} \Rightarrow \vec{H} = H\hat{\theta} \wedge \vec{M} = M\hat{\theta}$

Así,

r < a

$$\int_0^{2\pi} H_1 \cdot r\, d\theta = \frac{I_0 r^2}{a^2} \Rightarrow H_1(r)\cdot 2\pi r = \frac{I_0 r^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_1(r) = \frac{I_0 r}{2\pi a^2}\hat{\theta}}$$

a < r < b

$$\int \vec{H}_{a<r<b}\, d\vec{l} = I_0 \Rightarrow \boxed{\vec{H}_{a<r<b} = \frac{I_0}{2\pi r}\hat{\theta}}$$

b < r < c

$$\int \vec{H}_2\, d\vec{l} = I_0 - \frac{I_0(r^2-b^2)}{c^2-b^2}$$

, Por condiciones de borde, se tiene que $B_{2n} = B_{3n}$ y, como $\vec{B} = B\hat{\theta} \Rightarrow \vec{B}_2 = \vec{B}_3$ ¡Pero $\vec{H}_2 \neq \vec{H}_3$!

$$\rightarrow \vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \frac{\vec{H}_2}{\mu_2} = \frac{\vec{H}_3}{\mu_3}$$

$$\rightarrow \vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$$
$$\vec{B}_2 = \mu_3 \vec{H}_3$$

Así,
$$\int_0^{\pi} \frac{B_2}{\mu_2} r\, d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{B_2}{\mu_3} r\, d\theta = I_0 - \frac{I_0(r^2-b^2)}{c^2-b^2}$$

$$\frac{B_2}{\mu_2} r\pi + \frac{B_2}{\mu_3}(2\pi - \pi) r = \frac{I_0 - I_0(r^2-b^2)}{c^2-b^2} = \frac{I_0(c^2-\cancel{b^2}) - I_0(r^2-\cancel{b^2})}{c^2-b^2}$$

$$B_2 r\pi \frac{(\mu_2+\mu_3)}{\mu_2\mu_3} = \frac{I_0(c^2-\cancel{b^2}) - I_0(r^2-\cancel{b^2})}{c^2-b^2}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2+\mu_3}\hat{\theta} \Rightarrow \vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_2 = \frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3}\hat{\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H}_3 = \frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3}\hat{\theta}}$$

c < r

$$\boxed{\vec{H}_{c<r} = 0}$$

Para el campo magnético:

$r<a$

$$\rightarrow \vec{B}_1(r) = \frac{I_0 r \mu_1}{2\pi a^2}\hat{\theta}$$

$a<r<b$

en el vacío.

$$\rightarrow \vec{B}_{a<r<b}(r) = \frac{I_0 \mu_0}{2\pi r}\hat{\theta}$$

$b<r<c$

(calculado antes)

$$\rightarrow \vec{B}_2 = \frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2+\mu_3}\hat{\theta}$$

$c<r$

$$\rightarrow \vec{B}_{c<r} = 0 \,//$$

ⓒ Utilizaremos $\vec{K}_m = \vec{M}\times\hat{n}$

Calcularemos $\vec{M}$ en 1° lugar: $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \Rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \vec{M}$

$r<a$

$$\Rightarrow \frac{I_0 r\mu_1}{\mu_0 2\pi a^2} - \frac{I_0 r}{2\pi a^2} = \boxed{\frac{I_0 r(\mu_1-\mu_0)}{\mu_0 2\pi a^2}\hat{\theta} = \vec{M}_1}$$

$a<r<b$

$$\Rightarrow \frac{I_0}{2\pi r} - \frac{I_0}{2\pi r} = \boxed{0 = \vec{M}_{a<r<b}}$$

$b<r<c$

$$\Rightarrow \vec{M}_2 = \overbrace{\frac{I_0(c^2-r^2)}{\mu_0(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2+\mu_3}}^{\vec{B}_2/\mu_0} - \overbrace{\frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3}\cdot\frac{\mu_0}{\mu_0}}^{\vec{H}_2}$$

$$\boxed{\vec{M}_2 = \frac{I_0(c^2-r^2)\;\mu_3(\mu_2-\mu_0)}{\mu_0(c^2-b^2)r\pi(\mu_2+\mu_3)}\hat{\theta}}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_3 = \frac{I_0(c^2-r^2)}{\mu_0(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2\mu_3}{\mu_2+\mu_3} - \frac{I_0(c^2-r^2)}{(c^2-b^2)r\pi}\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3}\cdot\frac{\mu_0}{\mu_0}$$

$$\boxed{\vec{M}_3 = \frac{I_0(c^2-r^2)\;\mu_2(\mu_3-\mu_0)}{\mu_0(c^2-b^2)r\pi(\mu_2+\mu_3)}\hat{\theta}}$$

$c<r$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_{c<r} = 0}$$

Por último, separaremos las superficies :

$\underline{r=a}$ $\Rightarrow \vec{K}_1 = \vec{M}_1 \times \hat{n}$

$= M_1 \cdot \hat{\theta} \times \hat{r}$

$= \left.\dfrac{-I_0 r (\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 2\pi a^2} \hat{k} \right|_{r=a} = \dfrac{-I_0 (\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 2\pi a} \hat{k}$

$\underline{r=b}$

Borde interior del material ②:

$\Rightarrow \vec{K}_2 = \vec{M}_2 \times \hat{n}$

$= M_2 \hat{\theta} \times -\hat{r}$

$= \left.\dfrac{I_0 (c^2 - r^2) \quad \mu_3 (\mu_2 - \mu_0)}{\mu_0 (c^2 - b^2) r \pi (\mu_2 + \mu_3)} \hat{k} \right|_{r=b} = \dfrac{I_0 \cancel{(c^2 - b^2)} \mu_3 (\mu_2 - \mu_0)}{\mu_0 \cancel{(c^2 - b^2)} b \pi (\mu_2 + \mu_3)} \hat{k} =$

$= \dfrac{I_0 \mu_3 (\mu_2 - \mu_0)}{\mu_0 b \pi (\mu_3 + \mu_2)} \hat{k}$

Del material ③:

$\Rightarrow \vec{K}_3 = M_3 \hat{\theta} \times -\hat{r}$

$= \left.\dfrac{I_0 (c^2 - r^2) \quad \mu_2 \quad (\mu_3 - \mu_0)}{\mu_0 (c^2 - b^2) r \pi (\mu_2 + \mu_3)} \hat{k} \right|_{r=b} = \dfrac{I_0 \mu_2 (\mu_3 - \mu_0)}{\mu_0 b \pi (\mu_3 + \mu_2)} \hat{k}$ //

$\underline{r=c}$

$\Rightarrow \vec{K}_2 = M_2 \hat{\theta} \times \hat{r}$

$= -M_2 \hat{k} \Big|_{r=c} = \dfrac{I_0 (c^2 - c^2) \mu_3 \ldots}{\mu_0 (c^2 - b^2) \cdot c\pi \ldots} = 0$

$\Rightarrow \vec{K}_3 = -M_3 \hat{k} \Big|_{r=c} = \dfrac{I_0 (c^2 - c^2) \mu_2 \ldots}{\mu_0 (c^2 - b^2) \cdot c\pi \ldots} = 0$

En la intersección de los materiales, $\left.\begin{aligned} \hat{n} &= \hat{\theta} \\ \vec{M}_2 &= M_2 \hat{\theta} \\ \vec{M}_3 &= M_3 \hat{\theta} \end{aligned}\right] \rightarrow M \times \hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{K} = 0$ //

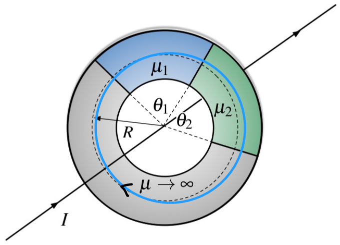
Problema 14.5

Considere un toroide de sección transversal circular A y de radio medio R como se muestra en la Figura. El toroide está compuesto por tres medios de permeabilidades μ, μ_1 y μ_2 (ver Figura). Un cable con corriente I atraviesa el toroide por su centro por eje perpendicular al toroide. Para efectos de calculo, puede considerar que $\mu \to \infty$.

a) Calcule $\vec{H}$ y $\vec{B}$, para cada material si las permeabilidades de los materiales son lineales, uniformes e isotrópicas.

b) Si las permeabilidades de los materiales son lineales uniformes e isotrópicas ¿existirían densidades de corriente de magnetización?. Si existieran, calcúlelas.

c) ¿Cómo cambia (explique) $\vec{H}$, $\vec{B}$ y las corrientes de magnetización si $\mu_1 = \alpha r$ o $\mu_1 = \alpha\theta$?.



* material isotrópico: propiedades mecánicas y térmicas iguales en todas direcciones.

ⓐ Utilizando ley de Ampère generalizada dentro del toroide:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{libre}$$

Tendremos 3 $\vec{H}$ distintos $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_0^{\theta_2} \vec{H}_2\cdot d\vec{l} + \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \vec{H}_1\cdot d\vec{l} + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\pi} \vec{H}_0\, d\vec{l} = \underbrace{I_{libre}}_{I}$

· Notamos que $\vec{B} = B(\theta, r)\hat{\theta}$

utilizando condiciones de borde, $B_{0\perp} = B_{2\perp} = B_{1\perp}$. Como $\vec{B} = B\hat{\theta}$, $\vec{B}_0 = \vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \boxed{\vec{B}}$

· Como las permeabilidades son lineales, uniformes e isotrópicas, $\vec{B} = B(r)\hat{\theta}$

Luego, $\displaystyle\int_0^{\theta_2} \frac{\vec{B}(r)}{\mu_2}\cdot R\,d\theta\,\hat{\theta} + \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \frac{\vec{B}(r)}{\mu_1}\cdot R\,d\theta\,\hat{\theta} + \int_{\theta_1+\theta_2}^{2\pi} \cancel{\frac{\vec{B}(r)\cdot R\,d\theta\,\hat{\theta}}{\mu \to \infty}} = I$

0

(enunciado) $\Rightarrow \vec{H}_3 = 0$

$$\frac{B(r=R)}{\mu_2}R\cdot\theta_2 + \frac{B(r=R)}{\mu_1}R\left[\cancel{\theta_2} + \theta_1 - \cancel{\theta_2}\right] = I$$

$$\Rightarrow B\cdot R\frac{\theta_2}{\mu_2} + B\cdot R\left(\frac{\theta_1}{\mu_1}\right) = I$$

$$\Rightarrow B(r=R)R\left[\frac{\theta_2}{\mu_2} + \frac{\theta_1}{\mu_1}\right] = I \quad \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r=R) = \frac{I\mu_1\mu_2}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}\hat{\theta}}$$

Por último, $\boxed{\vec{H}_1 = \dfrac{I\mu_2\,\hat{\theta}}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}}$, $\boxed{\vec{H}_2 = \dfrac{I\mu_1\,\hat{\theta}}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}}$.

* como se tiene una sección transversal circular A y se tiene el radio medio R, se supone que el campo magnético es más bien homogéneo dentro de éste.

ⓑ Primero calculamos el vector magnetización $\vec{M}$:

$$\vec{B}(r=R) = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

$$\hookrightarrow \vec{B}(r=R) = \mu_0(\vec{H}_1 + \vec{M}_1) = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2) = \mu_0(\cancel{\vec{H}_0}^{0} + \vec{M}_0)$$

- $$\frac{I\mu_1\mu_2}{\mu_0(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}\hat{\theta} = \frac{I\mu_2\hat{\theta}}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R} + \vec{M}_1 \Rightarrow \boxed{\frac{I\mu_2(\frac{\mu_1}{\mu_0} - 1)\hat{\theta}}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R} = \vec{M}_1}$$

- $$" = \frac{I\mu_1\hat{\theta}}{(\theta_1\mu_2 + \theta_2\mu_1)R} + \vec{M}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{I\mu_1(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1)\hat{\theta}}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R} = \vec{M}_2}$$

- $$\boxed{\frac{I\mu_1\mu_2}{\mu_0(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}\hat{\theta} = \vec{M}_0}$$

Calculando las densidades, notamos que la dirección de la superficie es perpendicular a $\hat{\theta}$, con lo que:

$$|\vec{K}_1| = \frac{I\mu_2}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}\left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0}\right)$$

; Como M es constante $\nabla \times \vec{M} = \vec{J} = 0$ //

$$|\vec{K}_2| = \frac{I\mu_1}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R}\left(\frac{\mu_2 - \mu_0}{\mu_0}\right)$$

$$|\vec{K}_3| = \frac{I\mu_1\mu_2}{(\theta_2\mu_1 + \theta_1\mu_2)R\mu_0}$$

ⓒ Si $\mu_1 = \alpha r$, $\displaystyle\int_0^{\theta_2} \frac{\vec{B}(r)}{\mu_2} \cdot R\, d\theta\, \hat{\theta} + \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \frac{\vec{B}(r)}{\alpha r} \cdot r\, d\theta\, \hat{\theta} = I$

$$\Rightarrow \vec{B}(r)\left[\frac{\theta_2 R}{\mu_2} + \frac{\theta_1}{\alpha}\right] = I$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{I\mu_2\alpha}{(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)}\hat{\theta}$$

- $$\vec{H}_1 = \frac{I\mu_2\cancel{\alpha}}{(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)\cancel{\alpha} r} = \frac{I\mu_2}{(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)r}\hat{\theta}$$ → disminuye al crecer r

- $$\vec{H}_2 = \frac{I\alpha}{(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)}\hat{\theta}$$

$$\longrightarrow \frac{I\mu_2\alpha}{\mu_0(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)} \cdot \frac{r}{r} - \frac{I\mu_2}{(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)r} \cdot \frac{\mu_0}{\mu_0} = \frac{I\mu_2(\alpha r - \mu_0)}{\mu_0(\theta_2 R\alpha + \theta_1\mu_2)r} = \vec{M}_1$$ → aumenta al crecer r.

$\cdot S_i\ \mu_2 = \alpha\theta$; $\displaystyle\int_0^{\theta_2} \frac{\vec{B}(r)}{\mu_2} \cdot R\, d\theta\, \hat{\theta} + \int_{\theta_2}^{\theta_2+\theta_1} \frac{\vec{B}(r)}{\alpha\theta} \cdot R\, d\theta\, \hat{\theta} = I$

$$\Rightarrow \vec{B}(r) \left[\frac{\theta_2 R}{\mu_2} + \frac{R}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{\theta_1} \right) \right] \right] = I$$

$$\Rightarrow \vec{B} \left[\frac{\theta_2 R \alpha + R \ln \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{\theta_1} \right)}{\mu_2 \alpha} \right] = I$$