Auxiliar 14

P1

a) Tenemos una onda de la forma

$$\tilde{\vec{E}} = E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}$$

Recordando que una onda EM de forma general se escribe como $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t-\phi)}$, si nuestro cpo. tiene una dependencia kz

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = kz \quad \therefore \vec{k} = k\hat{z} \text{ , ya que } \vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Para calcular el cpo magnético a partir del cpo. eléctrico usamos

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega} \longleftarrow \text{viene de ecs. de Maxwell}$$

entonces $\vec{B}$ en su expresión como función compleja (porque tenemos $\vec{E}$ en su expresión compleja) es:

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{1}{\omega}k\hat{z}\times\left(E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{x} + E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{y}\right)$$

$$= \frac{k}{\omega}E_1 e^{i(kz-\omega t)}\hat{y} - \frac{k}{\omega}E_2 e^{i(kz-\omega t-\phi)}\hat{x}$$

Ahora expresemos el vector de Poynting, para esto tomamos la parte real de $\tilde{\vec{E}}$ y $\tilde{\vec{B}}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &\equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{E}}\} = E_1\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{y} \\ \vec{B} &\equiv \mathrm{Re}\{\tilde{\vec{B}}\} = \frac{k}{\omega}E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{k}{\omega}E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{x} \end{aligned}\right\} \text{recordar que } E_1, E_2 \in \mathbb{R} \text{ por enunciado}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\left[E_1\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{y}\right]\times\left[\frac{k}{\omega}E_1\cos(kz-\omega t)\hat{y} - \frac{k}{\omega}E_2\cos(kz-\omega t-\phi)\hat{x}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\left[E_1^2\cos^2(kz-\omega t) + E_2^2\cos^2(kz-\omega t-\phi)\right]\hat{z}$$

y su promedio temporal sería

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt \text{ , con } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{\mu_0}\frac{k}{\omega}\left[E_1^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t)dt + E_2^2\int_0^{2\pi/\omega}\cos^2(kz-\omega t-\phi)\right]\hat{z} \text{ , hacemos } \begin{aligned} \Omega &= kz-\omega t \Rightarrow dt = -d\Omega/\omega \\ \Omega' &= kz-\omega t-\phi \Rightarrow dt = -d\Omega'/\omega \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\int_{kz}^{kz-2\pi} \cos^2\Omega \, d\Omega - \frac{E_2^2}{\omega}\int_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi} \cos^2\Omega' \, d\Omega' \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(\Omega + \sin\Omega\cos\Omega\right)\Big|_{kz}^{kz-2\pi} - \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(\Omega' + \sin\Omega'\cos\Omega'\right)\Big|_{kz-\phi}^{kz-\phi-2\pi} \right]\hat{z}$$

se van los términos $\sin x \cos x$ al tener periodo 2π

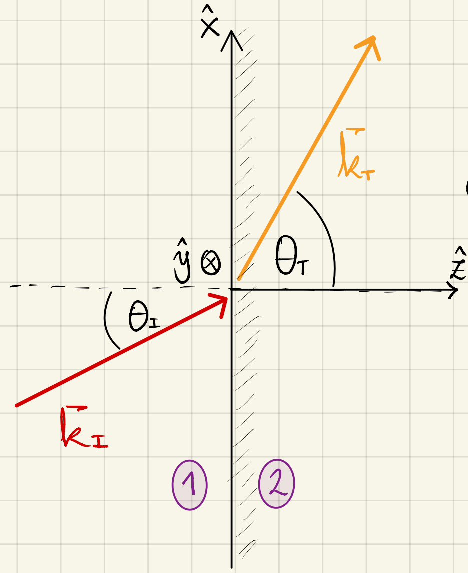
$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[-\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(kz - 2\pi - kz\right) - \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}\left(kz - \phi - 2\pi - (kz - \phi)\right) \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\pi\mu_0}\left[\frac{E_1^2}{\omega}\frac{1}{2}2\pi + \frac{E_2^2}{\omega}\frac{1}{2}2\pi \right]\hat{z}$$

$$= \frac{k}{2\mu_0\omega}\left[E_1^2 + E_2^2 \right]\hat{z}$$

P2

a) Tenemos un problema de ondas atravesando un medio, de forma general una onda transmitida desde el medio 1 al 2 es como



$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (*)$$

Nos dicen que modelemos la onda evanescente (la "transmitida") con un vector propagación $\vec{k}_T$ dado por

$$\vec{k}_T = \frac{\omega n_2}{c}\left(\sin\theta_T\,\hat{x} + \cos\theta_T\,\hat{z}\right)$$

y $\vec{r}$ lo escribimos de forma general (para cualquier posición)

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{k}_T\cdot\vec{r} = \frac{\omega n_2}{c}\left(x\sin\theta_T + z\cos\theta_T\right) \quad (1)$$

A priori no conocemos este "ángulo" de transmisión, pero nos dan su relación con el ángulo de incidencia (que es un valor que controlamos experimentalmente)

Ley Snell

$$\sin\theta_T = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I \Rightarrow \cos\theta_T = i\sqrt{\sin^2\theta_T - 1} = i\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I - 1}$$

>1 ya que estamos considerando $\theta_I > \theta_c$

Reemplazamos en (1)

$$\Rightarrow \vec{k}_T\cdot\vec{r} = \frac{\omega n_2}{c}\left(x\,\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_I + iz\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\theta_I - 1}\right)$$

$$= \frac{\omega}{c}n_1\sin\theta_I\, x + i\,\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2\sin^2\theta_I - n_2^2}\; z \equiv kx + i\kappa z$$

donde definimos las cantidades (ctes para un valor cte. de θ_I) $k \equiv \frac{\omega n_1}{c}\sin\theta_I$, $\kappa \equiv \frac{\omega}{c}\sqrt{(n_1\sin\theta_I)^2 - n_2^2}$

Reemplazando esta expresion en (*) obtenemos la expresión de la onda evanescente

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_{0T}\, e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)}$$

analizando sus argumentos tenemos que se propaga en $\hat{x}$ paralelo a la interfaz (por el kx) y se atenúa en z (por $-\kappa z$).

b) Se puede demostrar que un cpo eléctrico perpendicular al plano de incidencia x-z, o sea de la forma

$$\tilde{\vec{E}}_I(\vec{r},t) = \tilde{E}_{0I}\, e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\hat{y}$$

no cambia su polarización, o sea tanto la onda reflejada como la transmitida tienen polarización en $\hat{y}$ también

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{E}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}\,\hat{y} \quad , \text{ usando } \vec{k}_T = k_1\left(\sin\theta_T\,\hat{x} + \cos\theta_T\,\hat{z}\right)$$

y $\vec{B} = \frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega}$ calculamos $\tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{1}{v_2}\tilde{E}_{0T}\, e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}(-\cos\theta_T\,\hat{x}+\sin\theta_T\,\hat{z})$, con $v_2 = \frac{c}{n_2}$

escribimos todo en función de k, κ: $\vec{k}_T\cdot\vec{r} = kx + i\kappa z$, $\sin\theta_T = \frac{ck}{n_2\omega}$, $\cos\theta_T = i\frac{c\kappa}{n_2\omega}$

$$\Rightarrow \tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = \tilde{E}_{0T}\, e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)}\,\hat{y} \quad\wedge\quad \tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{n_2}{c}\tilde{E}_{0T}\, e^{-\kappa z} e^{i(kx-\omega t)}\left(-\frac{ic\kappa}{n_2\omega}\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\hat{z}\right)$$

Estos cpos. están en su expresión imaginaria, por lo que debemos tomar la parte real, escribamos $\tilde{E}_{0T}$ como

$$\tilde{E}_{0T} = E^R_{0T} + iE^I_{0T}, \quad \text{con } E^R_{0T}, E^I_{0T} \in \mathbb{R}$$

y expandiendo las exponenciales imaginarias usando la fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$$\tilde{\vec{E}}_T(\vec{r},t) = (E^R_{0T} + iE^I_{0T})(\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t))\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= \Big[\underbrace{E^R_{0T}\cos(kx-\omega t) - E^I_{0T}\sin(kx-\omega t)}_{\text{parte real}} + i\underbrace{\big(E^R_{0T}\sin(kx-\omega t) + E^I_{0T}\cos(kx-\omega t)\big)}_{\text{parte imaginaria}}\Big] e^{-\kappa z}\,\hat{y} = \tilde{\vec{E}}^R_T(\vec{r},t) + i\tilde{\vec{E}}^I_T(\vec{r},t)$$

tomamos la parte real

$$\vec{E}(\vec{r},t) \equiv [E^R_{0T}\cos(kx-\omega t) - E^I_{0T}\sin(kx-\omega t)]\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

recordemos la fórmula $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, donde si definimos $\underbrace{\frac{E^R_{0T}}{E_0} \equiv \cos\beta \text{ y } \frac{E^I_{0T}}{E_0} \equiv \sin\beta}_{E^R_{0T} \text{ y } E^I_{0T} \text{ deben cumplir } (E^R_{0T})^2 + (E^I_{0T})^2 = E_0^2}$ y $\alpha = kx - \omega t$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r},t) = E_0\left[\frac{E^R_{0T}}{E_0}\cos(kx-\omega t) - \frac{E^I_{0T}}{E_0}\sin(kx-\omega t)\right] e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= E_0[\cos\beta\cos(kx-\omega t) - \sin\beta\sin(kx-\omega t)]\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

$$= E_0\cos(kx-\omega t+\phi)\, e^{-\kappa z}\,\hat{y}$$

en un experimento tenemos la libertad de elegir la fase de transmisión, por lo que podemos elegir $\phi = \arccos\beta = \arcsin\beta \stackrel{!}{=} 0$ (que sería $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0 \wedge E^R_{0T} \stackrel{!}{=} E_0$)

Como $\tilde{\vec{B}}_T$ está en función de $\tilde{E}_{0T}$, si antes elegimos $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0$ ahora también

$$\Rightarrow \tilde{\vec{B}}_T(\vec{r},t) = \frac{n_2}{c}E^R_{0T}\big(\cos(kx-\omega t) + i\sin(kx-\omega t)\big)\left(-\frac{ic\kappa}{n_2\omega}\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\hat{z}\right) e^{-\kappa z}$$

$$= \frac{n_2}{c}E^R_{0T}\left[\underline{\frac{ck}{n_2\omega}\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} + \frac{c\kappa}{n_2\omega}\sin(kx-\omega t)\,\hat{x}} + i\underline{\left(-\frac{c\kappa}{n_2\omega}\cos(kx-\omega t)\,\hat{x} + \frac{ck}{n_2\omega}\sin(kx-\omega t)\,\hat{z}\right)}\right] e^{-\kappa z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) \equiv \frac{1}{\omega}E_0\, e^{-\kappa z}\big(\underline{k\cos(kx-\omega t)\,\hat{z} + \kappa\sin(kx-\omega t)\,\hat{x}}\big)$$, donde $E_0 = E^R_{0T}$ (ya que $E^I_{0T} \stackrel{!}{=} 0$)

c) Reemplace en las ecs. de Maxwell con los cpos. encontrados en b)

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

consideramos un medio sin carga, $\rho = 0$

$$\underbrace{\nabla \cdot \vec{B} = 0}_{\text{Sencillos}}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_2 \epsilon_2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{más matraqueros}}$$

consideramos un medio sin corriente $\vec{J} = \vec{0}$

$\mu_2 \epsilon_2 = \left(\frac{n_2}{c}\right)^2$

d) El vector de Poynting se calcula como $\vec{S} = \frac{1}{\mu_i}(\vec{E} \times \vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_2}(\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{\mu_2 \omega} E_0^2 e^{-2\kappa z}[\cos(kx - \omega t)\hat{y}] \times [k\cos(kx - \omega t)\hat{z} + \kappa \sin(kx - \omega t)\hat{x}]$$

$$= \frac{1}{\mu_2 \omega} E_0^2 e^{-2\kappa z}[k\cos^2(kx - \omega t)\hat{x} - \kappa \cos(kx - \omega t)\sin(kx - \omega t)\hat{z}]$$

Calculamos el promedio temporal en un ciclo completo ($T = 2\pi/\omega$) de este vector ($\hat{x}$ y $\hat{z}$ no dependen del tiempo así que salen de la integral) para una posición (x, y, z) fija

$$T \cdot \langle \vec{S} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_2 \omega} e^{-\kappa z}\left[\hat{x} k \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(kx - \omega t)\,dt - \kappa \hat{z} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(kx - \omega t)\sin(kx - \omega t)\,dt\right]$$

$\Omega(t) \equiv kx - \omega t \Rightarrow dt = -\frac{d\Omega}{\omega}$ (x fijo)

$$= \frac{E_0^2}{\mu_2 \omega} e^{-\kappa z}\left[-\frac{\hat{x} k}{\omega} \int_{kx}^{kx - 2\pi} \cos^2 \Omega\, d\Omega + \frac{\hat{z} \kappa}{\omega} \int_{kx}^{kx - 2\pi} \cos \Omega \sin \Omega\, d\Omega\right]$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_2 \omega} e^{-\kappa z}\left[+\frac{\hat{x} k}{\omega}\pi + \vec{0}\right]$$

con lo que obtenemos que la energía solo se transmite en $\hat{x}$ (paralelo a la interfaz) y no hay energía transmitida hacia dentro del medio ② (no hay componente de $\langle \vec{S} \rangle$ en $\hat{z}$)