Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Probabilidades - IN3141
Profesor: Charles Thraves - Natalia Trigo
Aux's: Camila Carrasco - Monserrat Marchant - Leonardo Meneses - Sebastián Rojas

Auxiliar #5

Variable aleatoria discreta II

Resumen

Distribuciones conocidas:

- Bernoulli $X \sim Ber(p)$, $R_X = \{0, 1\}$ tal que

$$p_X(x) = \begin{cases} p \text{ si } x = 1 \\ 1 - p \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Interpretación: X modela el resultado de un experimento dicotómico, de probabilidad p de resultar exitoso.

$$\mathbb{E}[X] = p \qquad \text{Var}(X) = p(1-p)$$

- Binomial $X \sim Bin(n, p)$, $R_X = \{0. \cdots, n\}$ tal que

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Observación: Si $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia de v.as. independiente tal que $X_i \sim Ber(p)$ $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, p)$
Interpretación: X modela el número de éxitos en n realizaciones de un experimento dicotómico de probabilidad favorable p.

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

- Hipergeométrica $X \sim \text{Hipergeom}(N, K, n)$, $R_X = \{\max(0, n+K-N), \cdots, \min(K, n)\}$ tal que

$$p_X(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Interpretación: Dado un conjunto de tamaño N, con un subconjunto especial de tamaño K, se nos permite sacar n elementos sin repetir. X es la cantidad de elementos especiales extraídos.

$$\mathbb{E}[X] = n\frac{K}{N} \qquad \text{Var}(X) = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

- Geométrica $X \sim \text{Geometrica}(p)$, $R_X = \{1, 2, 3, \cdots\}$ tal que

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \ \forall k \in R_X$$

Interpretación: Dado un experimento dicotómico de probabilidad favorable p, X es la primera vez que tal experimento resulta ser exitoso.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \qquad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

- Binomial Negativa $X \sim \text{Binomial Negativa}(m, p)$, $R_X = \{m, m+1, m+2, \cdots\}$ es tal que

$$p_X(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m}$$

Interpretación: Dado un experimento dicotómico de probabilidad favorable p, X es la cantidad de intentos para haber obtenido m éxitos.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{m}{p} \qquad \text{Var}(X) = \frac{m(1-p)}{p^2}$$

- Poisson $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $R_X = \{0, 1, \cdots\}$ tal que

$$p_X(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \ \forall k \in R_X$$

Interpretación: Representa el número de veces que ocurre un evento, dado que ocurre λ veces por unidad de tiempo.

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \qquad \text{Var}(X) = \lambda$$

- Teorema límite de Poisson Para p_n secuencia de números en $(0, 1)$ tal que $np_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

En particular, para un experimento binomial $X \sim Bin(n, p)$ tal que $p = \frac{\lambda}{n}$, para n suficientemente grande se asemeja a una v.a. $Y \sim Poisson(\lambda)$ *Interpretación:* Sirve para modelar eventos de probabilidad muy baja de ocurrir, pero que tienen muchas instancias posibles donde podrían ocurrir.

Pregunta 1

Dos amigos, Antonia y Benito, tienen una importante reunión en el otro extremo de la ciudad. La ciudad es convenientemente modelada por una grilla de 7×7. Específicamente, Antonia y Benito se encuentran en el punto con coordenadas $(0, 0)$, mientras que la reunión se realizará en el punto con coordenadas $(7, 7)$. Para trasladarse al lugar de la reunión, en cada esquina (par de coordenadas cuya abscisa y ordenada son valores enteros) lanzan una moneda, la cual tiene probabilidad p de salir cara, y $1 - p$ de salir sello. Cada vez que la moneda sale cara, avanzan por un arco hacia la derecha, es decir, avanzan hacia la derecha en una unidad. Si por el contrario, la moneda sale sello, entonces avanzan por el arco hacia arriba. Asuma que en caso de llegar a los puntos con abscisa u ordenada (pero no ambas) igual a 7, entonces los siguientes tramos son recorridos en línea recta en la dirección que apunta hacia el punto de coordenadas $(7, 7)$.

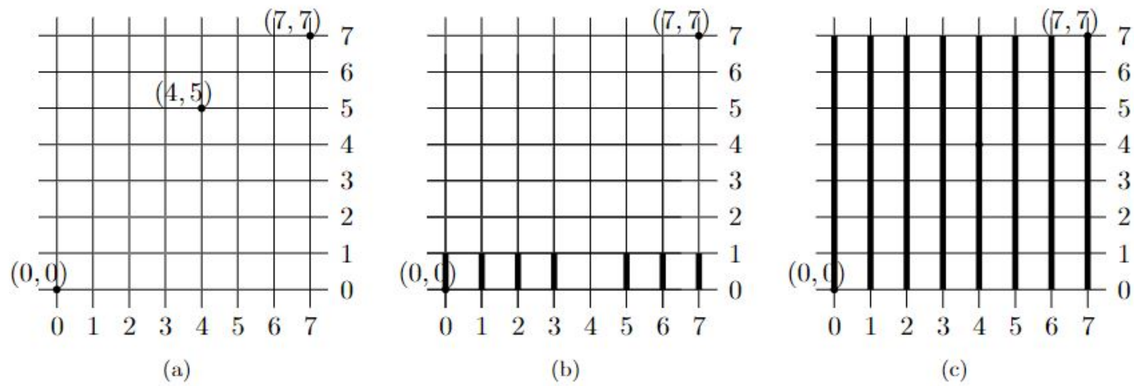

Figure 1: Mapas de la ciudad para partes 1, 2 y 3, respectivamente.

1. Calcule la probabilidad de pasar por el punto con coordenadas $(x, y) = (4, 5)$ en el trayecto hacia la reunión.
   Hint: note que solo importa mirar los primeros $x + y$ movimientos en la grilla. (Fig. 1 (a))

2. Suponga que en las calles marcadas con linea gruesa (Fig. 1 (b)) hay alto tráfico. Calcule la probabilidad de que Antonia y Benito **no** hayan pasado por zonas de alto tráfico en su trayecto hacia la reunión.

3. Ahora suponga que existe alto tráfico en todos los arcos en sentido vertical (Fig. 1 (c)). Se sabe que Antonia manejó 6 arcos y Benito el resto, pero no se sabe cuáles manejaron cada uno. Se sabe además que Benito se enoja cuando maneja 3 o más arcos con tráfico. ¿Cuál es la probabilidad de que Benito haya llegado enojado a la reunión?
   Hint: note que para responder la pregunta, no importa el trayecto específico que hicieron para llegar desde el punto de origen al punto destino.

Pregunta 2

Gato Bros es un popular juego de plataformas en que el personaje principal es un felino, que debe superar n niveles para convertirse en un héroe. Este juego no tiene un límite de vidas, pero es bastante difícil, por lo que podría tomarle muchos intentos pasar cada nivel. Cada vez que usted pierde en un nivel o que usted supera un nivel, se considera como un intento. Todos estos intentos son independientes entre si. En particular, para cada nivel i usted tiene una probabilidad p_i de superarlo cada vez que lo intenta.

a) Sea X_i : el número de intentos para superar la etapa i. ¿Cuál es la distribución de X_i? Justifique su respuesta

b) Sea X el número de intentos totales para superar los n niveles, calcule $E(X)$.

Para las próximas preguntas asumiremos que $p_i = p \quad \forall i \in \{1, 2, 3..., n\}$.

c) Sea X el número de intentos para superar el juego completo. ¿Cuál es la distribución de X? Justifique su respuesta.

Considere que ahora recibe una recompenza de R monedas cuando supera el nivel i en menos de h intentos. Además, debe pagar un costo de c monedas en cada nivel i que juega (independiente del número de intentos que le tome superarlo).

d) Sea Y el saldo final en monedas que usted tiene al superar los n niveles. Calcule $\mathbb{E}[Y]$ y $Var(Y)$. Note que Y puede tomar valores negativos.
(Hint: Notar que el número de monedas a obtener puede escribirse como $c_1 \cdot Z - c_2$, donde c_1, c_2 son constantes, y Z una VA discreta con distribución conocida.)

Pregunta 3

El número de correos electrónicos que recibe Sara en un día de trabajo (de lunes a viernes) se puede modelar con una distribución de Poisson con un promedio de $\frac{1}{6}$ correos electrónicos por minuto. Mientras que el número de correos electrónicos que recibe los fines de semana (sábado y domingo) sigue una distribución de Poisson con un promedio de $\frac{1}{30}$ correos electrónicos por minuto.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no reciba correos electrónicos en un intervalo de 4 horas en un domingo?

b) Se selecciona al azar un día de la semana (con igual probabilidad para todos los días), y se escoge de manera aleatoria un intervalo de una hora dentro de ese día. Si Sara no recibió ningún correo electrónico en ese intervalo. ¿Cuál es la probabilidad de que el día elegido sea un día de trabajo?