**Departamento de Ingeniería Civil Industrial**
**Probabilidades - IN3141**
**Profesor:** Charles Thraves - Natalia Trigo
**Aux's:** Camila Carrasco - Monserrat Marchant - Leonardo Meneses - Sebastián Rojas

# Auxiliar #11

Desigualdades y Convergencia

## Resumen

- **Desigualdad de Markov:** Sea $X$ una v.a. que toma valores no negativos. Para todo real $a > 0$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$$

- **Desigualdad de Chebyshev:** Sea $X$ una v.a. con esperanza $\mu$ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Para cualquier valor $k > 0$ se cumple que:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

- **Cota de la Unión (desigualdad de Boole):** Para cualquier secuencia de eventos $A_1, ..., A_n$ se cumple que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

- **Desigualdad de Jensen:** Sea $X$ una v.a. y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función:
  - Si $f$ es convexa, entonces $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
  - Si $f$ es cóncava, entonces $f(E[X] \geq E[f(X)]$

- **Desigualdad de Cauchy-Schwarz:** Para todo par de v.a. $X, Y$ se cumple que:

$$|E[XY]| \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

- **Convergencia en distribución**

  La secuencia de VA $X_n$, donde $n \in \mathbb{N}$, **converge en distribución** a la VA $X$, i.e. $X_n \xrightarrow{d} X$, si:

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

  donde $F_X(x)$ es continua.

- **Teorema:** Sea la secuencia de v.a. discretas $X_n$ no negativas definidas en los enteros, i.e,

$$R_X \subset \{\ 0, 1, 2, ...\}\ , R_{X_n} \subset \{\ 0, 1, 2, ...\}$$

para todo $n = 1, 2, 3, ....$ Entonces $X_n \xrightarrow{d} X$, si y solo si:

$$\lim_{n \to +\infty} p_{X_n}(x) = p_X(x)$$

- **Convergencia en probabilidad**

La secuencia de VA $X_n$, donde $n \in \mathbb{N}$, **converge en probabilidad** a la VA $X$, i.e. $X_n \xrightarrow{p} X$, si:

$$\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon > 0$$

- **Teorema de Convergencia en Probabilidad y Distribución:**

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{p} X, \text{ entonces } X_n \xrightarrow{d} X.$$

- **Convergencia casi segura**

La secuencia de VA $X_n$, donde $n \in \mathbb{N}$, definida sobre el mismo espacio muestral $\Omega$ y función de probabilidad $P$, **converge casi seguramente** a la VA $X$ (definida sobre el mismo espacio muestral $\Omega$ y funcion de probabilidad $P$), i.e. $X_n \xrightarrow{C.S.} X$, si:

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

También se puede denotar como:

$$P(\lim_{n \to +\infty} X_n = X) = 1$$

- **Teorema de Convergencia Casi Segura y en Probabilidad:**

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{C.S.} X, \text{ entonces } X_n \xrightarrow{p} X$$

- **Teorema de Convergencias:**

Sea $h$ una función continua, entonces:

$$\text{Si } X_n \xrightarrow{d} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$$
$$\text{Si } X_n \xrightarrow{p} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{p} h(X)$$
$$\text{Si } X_n \xrightarrow{C.S.} X, \text{ entonces } h(X_n) \xrightarrow{C.S.} h(X)$$

- **Promedio de v.a. iid:** Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a. iid con esperanza y varianza finita, i.e., $E[X_i] = \mu < \infty$ y $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$

Sea $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, entonces $E[\bar{X}] = \mu$, $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

- **Ley Débil de los Grandes Números**

  Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ VAs i.i.d con $E[X_i] = \mu < \infty$, entonces $\forall \epsilon > 0$, $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$ o equivalentemente:

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

- **Ley Fuerte de los Grandes Números**

  Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ VAs i.i.d con $E[X_i] = \mu < \infty$, entonces, $\bar{X} \xrightarrow{C.S.} \mu$, o equivalentemente:

$$\mathbb{P}\left( \{ \ \omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} \bar{X}(\omega) = \mu \} \right) = 1$$

- **Teorema Central del Límite**

  Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ VA i.i.d. con esperanza y varianza finita, i.e. $E[X_i] = \mu < \infty$ y $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$, entonces:

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + ... + X_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma}$$

  Converge en distribución a una distribución Normal estándar cuando $n \to +\infty$, es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n) = \Phi(z), \quad \forall z \in R$$

## Pregunta 1 [P2 Examen 2021-1]

Don Eustacio tiene un camión para hacer despachos. Cada día se tiene una carga, $Z$, que debe ser despachada dentro de ese mismo día. La carga (en *toneladas*) que debe repartir el camión en un día sigue una distribución Uniforme continua entre 2 y 4. Por otra parte, se tiene que el tiempo, $Y$, (en *horas*) que tarda el camión en repartir toda la carga de un día sigue una distribución exponencial con parámetro $Z^{-1/2}$. Por lo tanto, dado el tamaño de la carga de un día $Z$, tenemos que el promedio del tiempo de despacho es $Z^{1/2}$. La distribución de probabilidad de la carga de un día es independiente de la de distribución de probabilidad de la carga de los otros días.

Don Eustacio tiene un chofer que trabaja 8 *horas* al día. Por lo tanto, si es que el tiempo de despacho de un día es mayor 8 *horas*, entonces no se puede repartir toda la carga de ese día. La carga que no se alcanza a repartir un día se pierde, es decir, no se guarda para el día siguiente.

Don Eustacio hace la siguiente afirmación: *"Aplicando sobre la VA $Y$ (i.e. el tiempo de despacho de la carga de un día) una de las desigualdades vistas en el curso IN3141 que usa la varianza, se puede concluir que la probabilidad de que no se reparta toda la carga de un día es menor a* $0.08$*"*.

Determine la veracidad de la afirmación anterior. Note que establecer la veracidad de la afirmación debe restringirse a la metodología a la cual se remite en la afirmación, y no a computar el valor exacto de dicha probabilidad. Sea claro en su desarrollo en cómo llega a su respuesta.

**Hint:** No existe fórmula cerrada para la pdf marginal de la VA $Y$, i.e. del tiempo en repartir la carga de un día, de modo que evite obtener una expresión en fórmula cerrada para esto. Esto no implica que no se pueda resolver la pregunta haciendo uso de la pdf marginal de la VA $Y$. Por otra parte, notar que existen resultados vistos en clases sobre la esperanza y varianza que le ahorrarían hacer cómputos con distribuciones marginales o conjuntas.
**Hint 2:** Si $X$ es una VA y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $Var(h(X)) = E[(h(X))^2] - E[h(X)]^2$.

## Pregunta 2 [P3 Examen 2021-1]

1. Sea $X \sim Binomial(n, p)$ con p $= \frac{1}{2}$ y $X_k = n - X$, con $k = 1, 2, 3, ...$ una sucesión de VA. Demuestre si $X_k$ converge (o no) en distribución y/o en probabilidad a $X$.
2. En una autopista pasan exactamente $n$ vehículos al día, el TAG contabiliza a todos aquellos que pasan por ella. Usted quiere modelar la cantidad de vehículos que pasan por la autopista con el TAG al día en todos los días durante dos meses. Sean $X_1, X_2, ..., X_{60}$ las v.a. que representan la cantidad de vehículos que pasan con el TAG al día en cada uno de los 60 días respectivos. Considere que $X_i \sim$ Binominal(n,p) con i $\in \{1, ..., 60\}$ con los parametros p $= 0.4$ y n $= 30$. Calcule la probabilidad de que en dos meses pasen más de 680 vehículos. Justifique claramente sus pasos y el uso de teoremas en caso que sea necesario.