Auxiliar 2.

P1)

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0$

$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$ } Solución de $X = W$

Primero tenemos que ver que tengo una fracción donde el denominador no puede ser nulo $\Rightarrow$ $\boxed{X \neq 0\ ;\ X \notin \text{Dom}\{\text{sol } W\}}$

- Notamos que nos dan el hint = Ayuda.

$(X-1)^2(X+2)$

Veamos tenemos en un comienzo

$x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x \neq 0$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ \cap [\mathbb{R} - \{0\}]$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap ]0, \infty+[ \cap \mathbb{R} - \{0\}$

$\Leftrightarrow x \in ]0, \infty+[$ , como primera condición

$\Leftrightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}_+}$.

sabemos que $(X-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

en particular para $x \in \mathbb{R}_+$

$(x-1)^2 \geq 0$ (*)

para recordamos que una desigualdad preserva su orden si es amplificada (o reducida) por algo positivo

$x > 0 \quad /+2$

$x+2 > 2 > 0$ transitiva!!

$\Rightarrow \underbrace{x+2} > 0$

Recuerden siempre el orden de la desigualdad.

(*) · 

$\Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad /\cdot(x+2)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq \underbrace{0\cdot(x+2)}$

0 aniquila !!!

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)(x+2) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0$ $\quad /+3x$ Biyectiva $\quad /\cdot \frac{1}{x}, x \neq 0$ puedo!

$\Leftrightarrow \frac{(x^3-3x+2+3x)}{x} \geq \frac{+3x}{x}$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$ $\boxtimes$

b) $\forall k, \delta \in \mathbb{R},\ k, \delta > 0$

$k^3 + 2 \cdot \delta^3 \geq 3 \cdot k \cdot \delta^2 \ / \cdot \frac{1}{k \cdot \delta^2} \cdot \frac{1}{k}, \ \delta \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{k^2}{\delta^2} + \frac{2 \cdot \delta}{k} \geq 3$

$\Leftrightarrow \frac{k^2}{\delta^2} + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3$

Puedo ir de ida y vuelta pues no hago ninguna $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ si no $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow$ por a) $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$ si $x = \left(\frac{k}{\delta}\right)$

$\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3 \ / \cdot k \cdot \delta^2, \ \neq 0$

$\Rightarrow k^3 + 2\delta^3 \geq 3k\delta^2$ $\boxtimes$

c) $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}^{*}_{+}$

$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$

#Recordamos

$(x-y)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad / +2xy$

$x^2 + y^2 \geq 2xy \quad / \frac{1}{xy} \quad ; \ x \neq 0, y \neq 0$

$\boxed{\frac{x^2+y^2}{xy} \geq 2.}$ SAMUEL VARIABLE

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})$$

$$= \underbrace{x \cdot x^{-1}}_{1} + yx^{-1} + zx^{-1} + xy^{-1} + \underbrace{yy^{-1}}_{1} + zy^{-1} + xz^{-1} + yz^{-1} + \underbrace{zz^{-1}}_{1}$$

$$= 3 + yx^{-1} + zx^{-1} + xy^{-1} + zy^{-1} + xz^{-1} + yz^{-1}$$

# SAMOGI

$$= 3 + \frac{y^2+x^2}{xy} + \frac{x^2+z^2}{xz} + \frac{z^2+y^2}{xy} \geq 3+2+2+2=9$$

d) $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ Recuerden que son

$a^2+b^2=1$

$c^2+d^2=1$ $\Rightarrow ac+bd \leq 1$ variables mudas.

① $(a-c)^2 \geq 0$ # la desigualdad se

$\Rightarrow$ ② $(b-d)^2 \geq 0$ pre serva bajo la suma.

① + ② $\Leftrightarrow a^2 - 2cd + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geq 0$

hipótesis $\Leftrightarrow \underbrace{a^2+b^2}_{1} + \underbrace{c^2+d^2}_{1} - 2bd - 2ac \geq 0$ $/ + 2bd + 2ac$

$\Leftrightarrow 2 \geq 2(bd+ac)$ $/ \frac{1}{2}$

$1 \geq (bd+ac)$ $\boxed{/\!/}$

P2) a) $\dfrac{x^2+(-2x)+2}{x^2-3x+2} \geq 1$

1) Buscamos los puntos críticos pero siempre intentaremos dejar

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ Así todo t puedes ir

$\leq 0$

$> 0$

$< 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+(-2x)+2}{x^2-3x+2} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{x^2}-2x+\cancel{2}-\cancel{x^2}+3x-\cancel{2}}{x^2-3x+2} \geq 0$

$\dfrac{x}{(x-2)(x-1)} \geq 0$ # punto crítico

$x_1-2=0$

$\Rightarrow x_1=2$

$x_2-1=0$

$\Rightarrow x_2=1$

$\Rightarrow x=x_3=0$

| | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $X-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $X-1$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

Como se pide $\dfrac{X}{(x-2)(x-1)} \geq 0$ lo que es equivalente.

Sol $x \in [0,1[ \cup ]2,+\infty[$ //

b) $\dfrac{4x-3}{6x} \leq \dfrac{8x-6}{5x} \iff \dfrac{4x-3}{6x} - \dfrac{(8x-6)}{5x} \leq 0$

$\iff \dfrac{20x-15-48x+36}{30x} \leq 0$

$\iff \dfrac{21-28x}{30} \leq 0$ , $\iff$

$\dfrac{7-8x}{10} <$

$$\Leftrightarrow \frac{20x - 15 - 48x + 36}{30x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{21 - 28x}{30x} \leq 0 \quad / \cdot \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 4x}{210x} \leq 0 \cdot \frac{1}{7} = 0.$$

Bien!

Puntos críticos!

$3 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

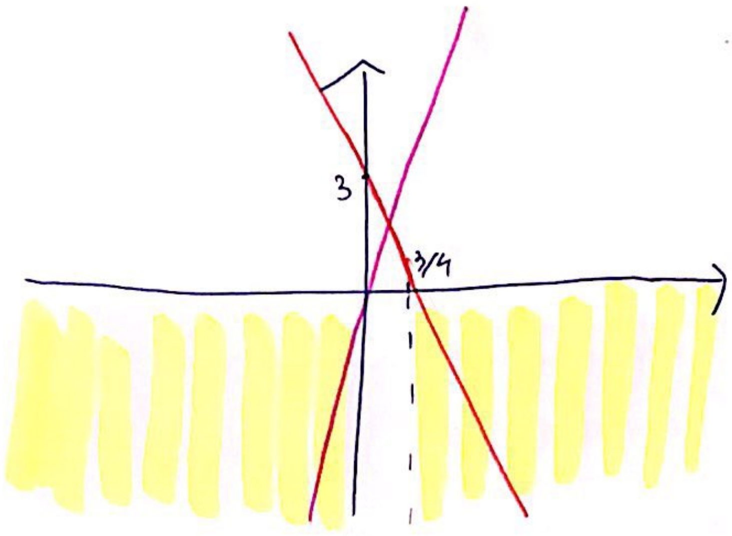
$210x = 0 \Rightarrow x = 0$ , $210 \neq 0$.

| | $-\infty$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | $\infty^+$ |
|---|---|---|---|---|
| $3-4x$ | $+$ | $+$ | $-$ | |
| $210x$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| | $-$ | $+$ | $-$ | |

$\Rightarrow$ sol

$$S = ]-\infty, 0[ \cup ]\tfrac{3}{4}, \infty^+[$$

Puede ser abierto o cerrado, depende de $f(x) \leq 0$
$f(x) < 0$




— 210X

— 3-4X

$$\frac{3-4X}{210X} < 0$$

$]-\infty , 0[ \cup ]3/4 , \infty+[$

Como se puede verificar la solución gráfica coincide con la solución analítica.

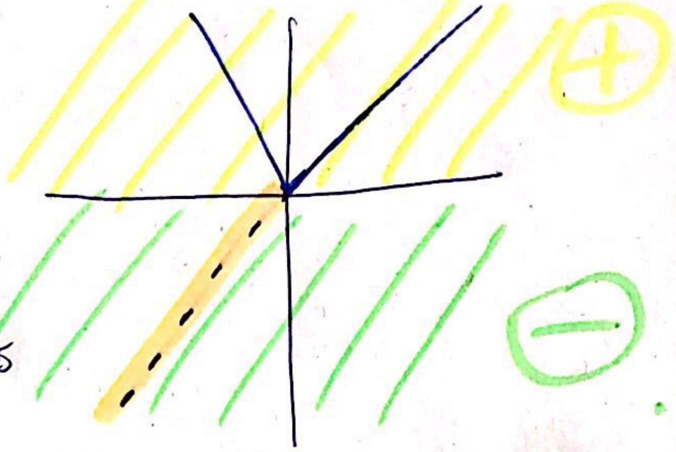
P3| Notamos que

$$\frac{[x\cdot(x+2) - |x+2|\cdot|x-3|]}{(x+1)(x-2)} < 0 \quad \Bigg\}\ \text{"Felipe."}$$

1 2

Primero recordemos la definición de |.|

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$




Pues esta todos los valores negativos los hace positivos.

- He destacado con ▬ los valores absolutos pues para distintos intervalos de $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ voy a tener distintas expresiones para "Felipe".

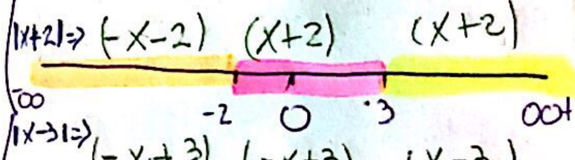
DOMINIO.

sabemos que si $x < -2$
$\Rightarrow |x+2| = -(x+2) = -x-2$ //

sabemos que si $x > -2$
$\Rightarrow |x+2| = x+2$ //

sabemos que si $x < 3$
$\Rightarrow |x-3| = -(x-3) = -x+3$ //

sabemos que si $x > 3$
$\Rightarrow |x-3| = x-3$ //




entonces tenemos 3 intervalos a revisar

$(-\infty, -2)$

$(-2, 3)$

$(3, \infty+)$

Scanned with CamScanner

CASO $(-\infty, -2)$

$$\Rightarrow \frac{x\cdot(x+2) - (x+2) - (x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + x + 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + (+6)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

Si: HAY valor absoluto hay tabla.!

# Siempre la idea es dejar productos|

de la forma
$$\frac{p(x)\cdot Q(x)}{g(x)\cdot f(x)} \leq > 0$$
Así solo veo signos!

tomo puntos críticos!

$3x+6=0 \Rightarrow x=-2$
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$
$x-2=0 \Rightarrow x=2$

| | $-\infty$   $-2$ | $-2$   $-1$ | $-1$   $2$ | $2$   $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|
| $3x+6$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Solución inicial $(-\infty, -2) \cup (-1, 2)$ pero debo $\cap$ (intersectarla) con el intervalo donde estoy trabajando en este CASO $(-\infty, -2)$
solución final $[(-\infty, -2) \cup (-1, 2)] \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$

S1

Caso $(-2, 3)$

$$\frac{x(x+2) - (x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + x^2 - x - 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

Puntos críticos:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

| | $-\infty$   $-2$ | $-1$ | $3/2$ | $2$ | $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

$$[(-2, -1) \cup (\tfrac{3}{2}, 2)] \cap (-2, 3) = (-2, -1) \cup (\tfrac{3}{2}, 2) \quad S_2$$

Caso $(3, \infty+)$

$$\frac{x(x+2)-(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}+x+6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+6}{(x+1)(x-2)} < 0$$ → Misma desigualdad que en caso $(-\infty, -2)$ Así que su solución inicial es

$[(-\infty, -2)]$ → solución inicial

$S_3 = (-\infty, -2) \cap (3, \infty+) = \phi$.

Donde estoy trabajando

$S_F = S_1 \cup S_2 \cup \cancel{S_3}$ $\phi$

$= (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (3/2, 2)$.

P4|| $x, y < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$$

- Lo primero que debemos ver

es $(r-z)^2 \geq 0$

$(r^2 - 2rz + z^2) \geq 0$

$$\boxed{r^2 + z^2 \geq 2rz \quad \forall r, z \in \mathbb{R}.}$$

$a = r^2$

$b = z^2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Si $a = \frac{1}{1-x^2}$ ; $b = \frac{1}{1-y^2}$

$$\boxed{\begin{array}{l} x, y < 1 \\ xy < 1 \\ 2xy < 2 \\ 2 < -2xy \end{array}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$$

$(1-x^2)(1-y^2)$

$1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$-2xy \geq -x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \geq \frac{2}{\sqrt{1-2xy+x^2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1-xy)^2}}$$

$$\geq \frac{2}{1-xy}$$

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

Pauta Aux Extra intro cálculo.

P2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$

PDQ: $-((-a)+b) = a-b.$

Recordamos que probar esto es análogo a justificar $((-a)+b)+(a-b)=0$
entonces tomamos

$$[(-a)+b]+[a-b] = \quad / \text{ definición y conmutatividad } (+)$$
$$=[b+(-a)]+[a+(-b)] \quad / \text{ Asociatividad.}$$
$$=[b+[(-a)+a]+(-b) \quad / \ \exists \ \cancel{\text{neut}} \text{ opuesto } / \text{Conmuta } -a+a=a+\ldots$$
$$=[b+[a+(-a)]+(-b) \quad / \ \exists \text{ neutro } (+).$$
$$=b+0+(-b) \quad / \ \exists \text{ opuesto}$$
$$=b+(-b)$$
$$=0$$

Entonces recordamos que dijimos que $a-b$ es el opuesto aditivo de $(-a)+b$, pero el opuesto aditivo de $(-a)+b$ es $-((-a)+b)$, entonces decimos el opuesto aditivo es único
Así que es un impostor!! $\Rightarrow -((-a)+b) = a-b$ ☒

Scanned with CamScanner

b) $|X_1 + X_2 + \dots X_{n-1} + X_n| \leq |X_1| + |X_2| + \dots + |X_{n-1}| + |X_n|$

Si $n = 1$

Caso base

$|X_1| \leq |X_1| \quad , \quad \forall X_1 \in \mathbb{R}$ ✓

Hipótesis de inducción.

Para algún $K \in \mathbb{N}$.

Lo importante es manejar que significa asumir hasta un $K \in \mathbb{N}$ cualquiera

Se cumple.

$|X_1 + X_2 + \dots X_{K-1} + X_K| \leq |X_1| + |X_2| + \dots |X_{K-1}| + |X_K|$

Demostramos para caso $K+1$

$|\underbrace{X_1 + X_2 + \dots X_{K-1} + X_K} + X_{K+1}| \leq$

Usamos

$|a + b| \leq |a| + |b|$

$\Rightarrow |\quad + X_{K+1}| \leq |\quad| + |X_{K+1}|$

$\leq |X_1| + |X_2| + \dots + |X_{K-1}| + |X_K| + |X_{K+1}|$ Paso inductivo.

Lo cual demuestra lo pedido! ☺

$\square$

c) Dem: $\frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$

Primero
$x \neq 1$
$x \neq -1$
$Dom = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

A partir de

$$\frac{1}{x+1} \leq \left| x + \frac{1}{x-1} \right|$$

Usando parte b)

$$\left| x + \frac{1}{x-1} \right| \leq |x| + \left| \frac{1}{x-1} \right| = |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

transitividad

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

Ahora queremos ver el conjunto solución

Veamos lo siguiente:

$$\frac{1}{x+1} \leq |x| + \frac{1}{|x-1|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - |x| - \frac{1}{|x-1|} \leq 0$$

# Veamos los puntos críticos de los ~~fun~~ $|\cdot|$ Así podemos trabajar con una mejor expresión.

$|x| \to$ si $x > 0$ v $x < 0$

$|x-1| \to$ si $x > 1$ v $x < 1$

trabajamos

| $-\infty$ | $0$ | $1$ $\infty+$ |
|---|---|---|
| $(-x)$ | $(x)$ | $(x)$ |
| $(1-x) = -(x-1)$ | $-(x-1) = 1-x$ | $(x-1)$ |

!!

**Caso 1** | $(-\infty, 0]$

$$\frac{1}{x+1} -- (x) - \frac{1}{-(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{1}{x+1} + x + \frac{1}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{(x-1) + x(x^2-1) + x+1}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

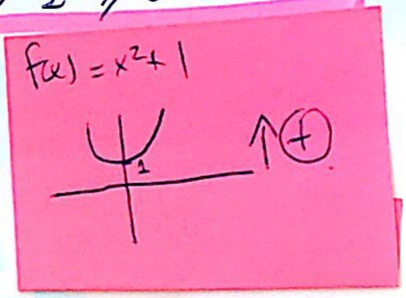
$$\frac{x-\cancel{x} + x^3 - \cancel{x} + \cancel{x} + \cancel{1}}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x^3 + x}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

Recordar $x^2 \geq 0 \;/+1 \;\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{x^2+1 \geq 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$



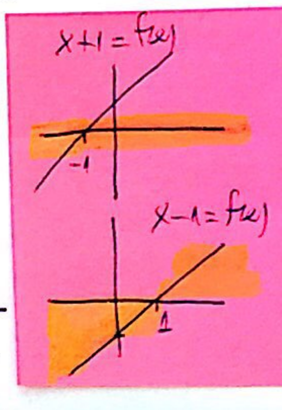

Cambio signos

$x=0$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

| | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x^2+1$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x+1)$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-1)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |




Sol inicial: $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

**Sol** $= [(-\infty,-1) \cup [0,1)] \cap (-\infty, 0] = (-\infty, -1) \cup \{0\}$

⊕

⊖

Caso $x\in(0, 1)$

$$\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{-(x-1)} \le 0$$

$$\frac{1}{x+1} - x + \frac{1}{(x-1)} \le 0$$

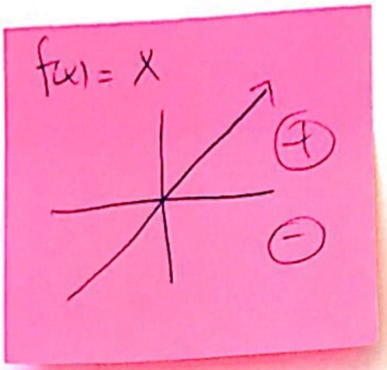
$$\frac{x-1-x(x^2-1)+x+1}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

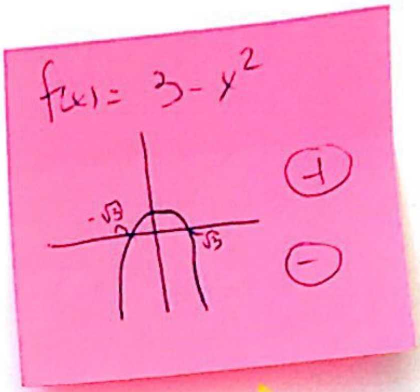
$$\frac{x-\cancel{x}-x^3+x+x+\cancel{1}}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{3x-x^3}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x(3-x^2)}{(x+1)(x-1)} \le 0$$

$$\frac{x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{(x+1)(x-1)} \le 0$$




$x=0$

$3-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

| | $-\infty$ a $-\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ a $-1$ | $-1$ a $0$ | $0$ a $1$ | $1$ a $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ a $\infty+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | − | − | − | + | + | + |
| $3-x^2$ | − | + | + | + | + | − |
| $x+1$ | − | − | + | + | + | + |
| $x-1$ | − | − | − | − | + | + |
| | + | − | + | − | + | − |

Solución inicial $[-\sqrt{3}, -1) \cup (0, 1) \cup [\sqrt{3}, \infty+)$

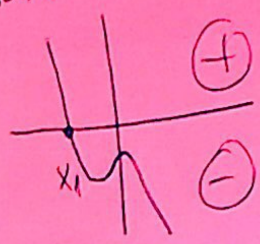
$$S_2 = [[-\sqrt{3}, -1) \cup (0,1) \cup [\sqrt{3}, \infty+)] \cap (0, 1) = (0, 1)$$

CASO $x \in (1, \infty^{+})$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{x+1} - x - \frac{1}{(x-1)} \leq 0 \\
&\frac{(x-1) - x(x^2-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
&\frac{x-1 - x^3 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
&\frac{-x^3 + x - 2}{(x+1)(x-1)} \leq 0
\end{aligned}\right\}$$

$f(x) = -x^3 + x - 2$




$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

| | $-\infty$   $x_1$ | $x_1$   $-1$ | $-1$   $1$ | $1$   $\infty^{+}$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x^3+x-2$ | + | − | − | − |
| $x+1$ | − | − | + | + |
| $x-1$ | − | − | − | + |
| | + | − | + | − |

Solución inicial: $(x_1, -1) \cup (1, \infty^{+})$

$S_3 = [(x_1, -1) \cup (1, \infty^{+})] \cap (1, \infty^{+}) = (1, \infty^{+})$

$S_T = S_1 \cup S_2 \cup \underline{S_3}$ //

Terminamos !

Cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl