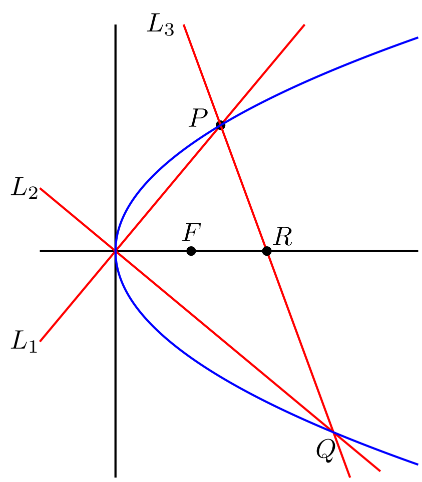
Semana 4

P1. Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola, $P \neq Q$. PQ corta al eje de simetría de la parábola en R. Probar que el foco divide al trazo OR en la razón $1 : 3$.

Solución



La expresión $y^2 = 4x$ es la ecuación de una parabola de *eje horizontal* con directriz $D\colon x = -1$, foco $F = (1,0)$ y vértice $V = (0,0)$. Para ver esto podemos reescribir la ecuación como $x = \frac{1}{4p}y^2$ con $p = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} D\colon x &= -p = -1 \\ F &= (p,0) = (1,0) \\ V &= (0,0) \end{aligned}$$

o bien de la forma

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{con } a = \tfrac{1}{4}, \quad b = 0 \quad \text{y } c = 0$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 = 0\\
&D\colon x = \frac{-1-\Delta}{4a} = \frac{-1-0}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -1\\
&F = (\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}) = (1,0))\\
&V = (-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}) = (0,0)
\end{aligned}$$

Sabemos que L_1 y L_2 cortan al eje OY en el origen O y que son perpendiculares.
Si $L_1\colon y = mx$ con $m \neq 0$ entonces $L_2\colon y = -\frac{1}{m}x$. Para determinar R, necesitamos encontrar primero P y Q.
P: es el punto de intersección, distinto a 0, entre la parabola y L_1. Así, si $P = (x_p, y_p)$ entonces $y_p = mx_p$ y $y_p^2 = 4x_p$, luego

$$\begin{aligned}
4x_p = m^2x_p^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_p(m^2x_p - 4) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad x_p = 0 \vee x_p = \tfrac{4}{m^2}
\end{aligned}$$

El caso $x_p = 0$ no interesa pues corresponde al origen O. Así $x_p = \frac{4}{m^2} \Rightarrow y_p = \frac{4}{m}$ y por lo tanto $P = (\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m})$
Q: Se obtiene de forma similar a lo anterior, con m reemplazado por $-\frac{1}{m}$, luego $Q = (4m^2, -4m)$.
R: Es la intersección de la recta L_3, que pasa por P y Q, con el eje OX. La ecuación punto-punto de esa recta es

$$L_3\colon y - y_p = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}(x - x_p)$$

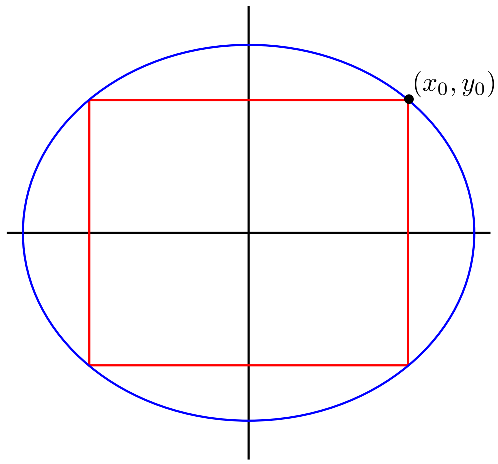
de donde

$$y - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2+1)}{m^4-1}(x - \frac{4}{m^2})$$

Si $R = (x_R, y_R)$ entonces sabemos que $y_R = 0$ y x_R se encuentra haciendo $y = 0$ en la ultima ecuación.
Observación: En la última ecuación hemos supuesto implícitamente que $m \neq \pm 1$ para que L_3 sea oblicua. Si $m = 1$ entonces $P = (4,4)$ y $Q = (4,-4)$ de modo que L_3 es vertical y además se obtiene que $R = (4,0)$ directamente. El caso $m = -1$ es similar. Esto justifica el caso $m = \pm 1$ por separado.
Volvamos al caso $m = \pm 1$. Haciendo $y = 0$ en la ecuación para L_3 se obtiene

$$x = \frac{+4}{m} \cdot \frac{m^4-1}{+m(m^2+1)} + \frac{4}{m^2} = \frac{4(m^4-1) + 4(m^2+1)}{m^4+m^2} = 4.$$

P2. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, encontrar el punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0,y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice las propiedades de parábolas para determinar el máximo.
Solución



De acuerdo a la figura se tiene que el área del rectángulo inscrito es

$$A(x_0,y_0)=4x_0y_0 \tag{1}$$

y como (x_0,y_0) pertenece a la elipse se satisface la relación

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

despejando y_0 en función de x_0 desde (2);

$$y_0=\pm b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} \tag{3}$$

pero $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2_+$, luego

$$y_0=b\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}} \tag{4}$$

entonces reemplazando en (1) se obtiene;

$$A(x_0)=4bx_0\sqrt{1-\frac{x_0^2}{a^2}}$$

entonces

$$A^2(x_0)=16b^2x_0^2(1-\frac{x_0^2}{a^2})$$

ahora si usamos la variable auxiliar $u = x_0^2$ se tiene que

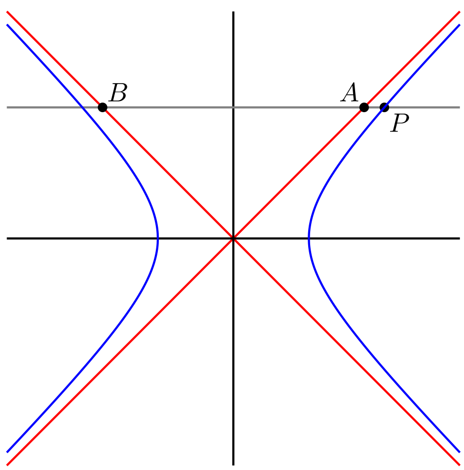
$$A^2(u) = 16b^2u(1 - \frac{u}{a^2}) \tag{5}$$

la cual corresponde a una parábola invertida, cuyo máximo se encuentra en el vértice, luego las coordenadas del vértice son

$$V = (\frac{a^2}{2}, 4b^2a^2)$$

es decir $(x_0^2) = u_{max} = \frac{a^2}{2}$ de donde $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ y usando (4) se concluye que $(x_0, y_0) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$.
Observación: Notar que acá se maximizó el cuadrado del área del rectángulo inscrito en la elipse, pero maximizar una cantidad positiva es lo mismo que maximizar su cuadrado.

P3. Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ demostrar que $AP \cdot PB = a^2$, donde P es un punto sobre la hipérbola y A y B son las intersecciones de una recta que pasa por P paralela al eje X, con las asíntotas de la hipérbola.
Solución



Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la hipérbola, entonces x_0 e y_0 satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

.
Recordemos que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas de ecuaciones $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Determinemos A y B: La recta que pasa por $P = (x_0, y_0)$ paralela al eje X, tiene ecuación $y = y_0$ y como A es la intersección de esta recta con una de las asíntotas debe cumplir

$$\begin{aligned} y &= y_0 \\ y &= \frac{b}{a}x \end{aligned}$$

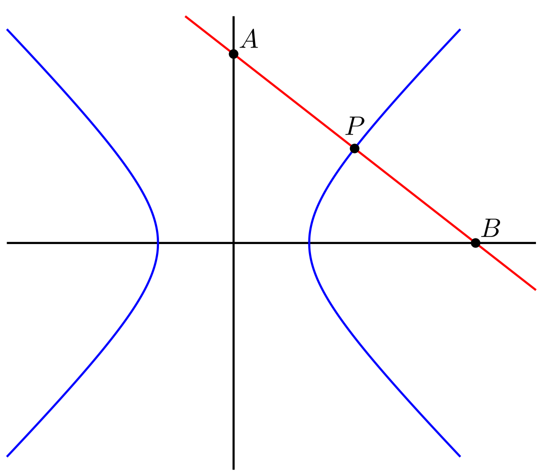
así $A = (\frac{ay_0}{b}, y_0)$, donde hemos supuesto sin pérdida de generalidad que $y_0 \geq 0$. Análogamente se obtiene que $B = (-\frac{ay_0}{b}, y_0)$.
Por lo tanto

$$d_{AP} = \sqrt{(x_0 - \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 - \frac{a}{b}y_0|$$
$$d_{BP} = \sqrt{(x_0 + \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 + \frac{a}{b}y_0|$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_{AP} \cdot d_{BP} &= |x_0 - \frac{a}{b}y_0||x_0 + \frac{a}{b}y_0| \\ &= |x_0^2 - \frac{a^2}{b^2}y_0^2| \\ &= a^2|\underbrace{\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{=1}| \\ &= a^2 \end{aligned}$$

P4. Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. La recta normal a la hipérbola por P corta al eje OX en A y al eje OY en B. Demuestre que P divide al trazo AB en una razón constante.
Solución



Recordemos que la ecuación de la recta tangente a una hipérbola en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{6}$$

que se puede escribir como

$$y = \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2}{y_0}$$

es decir la pendiente de la recta tangente a la hipérbola es $m_1 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ y así la pendiente de la recta normal es $m_2 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. Por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \tag{7}$$

Ahora debemos encontrar A y B:
A: A es la intersección de la recta normal con el eje OX, es decir satisface la ecuación (7) con $y = 0$, de donde se obtiene $A = (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}, 0)$.
B: B es la intersección de la recta normal con el eje OY, es decir satisface la ecuación (7) con $x = 0$, de donde se obtiene $B = (0, y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2})$.
Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d_{AP}^2}{d_{BP}^2} &= \frac{(x_0 - (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}))^2 + (y_0 - 0)^2}{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - (y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2}))^2} \\ &= \frac{b^4}{a^4} \frac{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\ &= \frac{b^4}{a^4} \end{aligned}$$

por lo tanto P divide al trazo AB en una razón constante.

P5. Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

a) Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L.

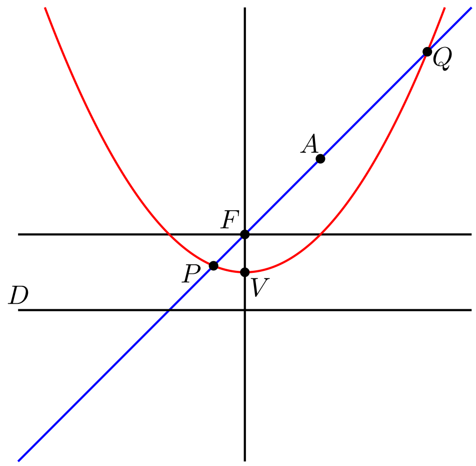
b) Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m.

c) Encuentre el punto medio A del segmento PQ.

d) Pruebe que $dist(A, P) = dist(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.

e) Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

Solución



Sean F, V y D el foco, el vértice y la directriz de la parábola respectivamente. Escojamos la parábola como en la figura, es decir con el foco F en el origen de coordenadas y el vértice V a una distancia p desde el origen, luego

$$\begin{aligned} V =& (0, -p) \\ F =& (0, 0) \end{aligned}$$

(a) La ecuación de una parábola vertical de foco $(0, p)$ es $y = \frac{x^2}{4p}$, y trasladando el foco al origen se obtiene la ecuación de nuestra parábola

$$y = \frac{x^2}{4p} - p$$

y la ecuación de la recta es $y = mx$.

(b) Para encontrar los puntos de intersección P y Q de L con la parábola debemos resolver el siguiente sistema

$$\begin{aligned} y =& mx \\ y =& \frac{x^2}{4p} - p \end{aligned}$$

reemplazando la primera en la segunda ecuación, se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$\frac{x^2}{4p} - mx - p = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} (x_Q, y_Q) &= \left(2(m + \sqrt{m^2+1})p, 2(m + \sqrt{m^2+1})pm\right) \\ (x_P, y_P) &= \left(2(m - \sqrt{m^2+1})p, 2(m - \sqrt{m^2+1})pm\right) \end{aligned}$$

(c) Sea A el punto medio del segmento PQ, entonces

$$A = \frac{(x_Q, y_Q) + (x_P, y_P)}{2} = (2mp, 2m^2p).$$

(d) dado que la parábola es vertical, la directriz es una recta horizontal y la distancia entre ésta y el foco es P, entonces la directriz tiene ecuación $D : y = -2p$, por lo tanto

$$dist(A, D) = 2m^2p - (-2p) = 2m^2p + 2p = 2p(m^2 + 1)$$

y por otra lado

$$\begin{aligned} dist(A,P) =& \sqrt{\left(2mp - 2(m - \sqrt{m^2+1})p\right)^2 + \left(2m^2p - 2(m - \sqrt{m^2+1})pm\right)^2} \\ =& \sqrt{4(m^2+1)p^2m^2 + 4(m^2+1)p^2m^2} \\ =& \sqrt{4p^2(m^4 + m2^2 + 1)} \\ =& 2p(m^2+1) \end{aligned}$$

por lo tanto $dist(A, P) = dist(A, D)$.

(e) la recta tangente a una parábola de ecuación $y = \frac{x^2}{4p} - p$ en el punto (α, β) (ver apunte) está dada por

$$x\alpha = 4p(\frac{y+\beta}{2} + p)$$

que se puede escribir como:

$$y = \frac{\alpha}{2p}x - (2p + \beta)$$

es decir la recta tangente posee pendiente $m_t = \frac{\alpha}{2p}$ luego la pendiente de la recta tangente que pasa por P, digamos m_P, es

$$m_P = (m + \sqrt{m^2+1})$$

y para Q, es

$$m_Q = (m - \sqrt{m^2+1})$$

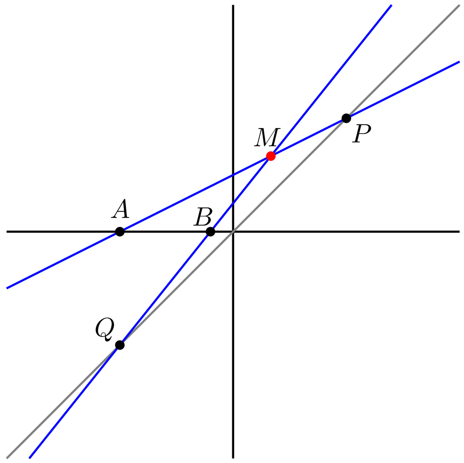
así

$$m_P \cdot m_Q = (m + \sqrt{m^2+1})(m - \sqrt{m^2+1}) = -1$$

y por lo tanto las rectas tangentes a la parábola en P y Q son perpendiculares.

P6. Dada la recta L: $y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera P sobre L y su simétrico Q con respecto al origen. Las rectas PA y QB se cortan en un punto M. Determinar el lugar geométrico de M cuando el punto P se desplaza sobre L.

Solución



Sea $P=(x_0,kx_0)$, entonces $Q=(-x_0,-kx_0)$.
Escribamos la ecuación de la recta que pasa por PA:

$$y-0=\frac{kx_0-0}{x_0-a}(x-a)$$

lo mismo para QB:

$$y-0=\frac{-kx_0-0}{-x_0-b}(x-b)$$

donde hemos supuesto que $x_0\neq a$ y $x_0\neq -b$.
M es la intersección es la solución del sistema

$$\begin{aligned}y=&\frac{kx_0}{x_0-a}(x-a)\\ y=&\frac{kx_0}{x_0+b}(x-b)\end{aligned}$$

supongamos que $x_0\neq 0$, entonces el sistema anterior se puede escribir como

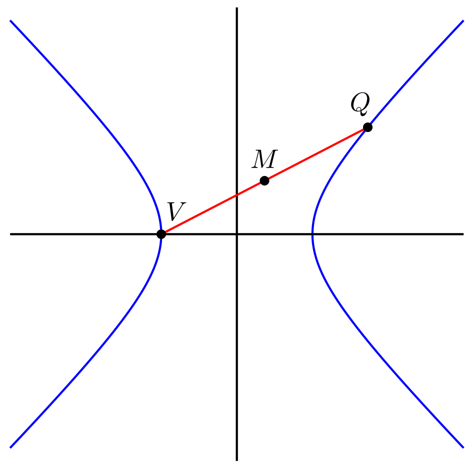
$$\begin{aligned}y(1-\frac{a}{x_0})=&k(x-a)\\ y(1+\frac{b}{x_0})=&k(x-b)\end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por b, la segunda por a y sumando

$$y(a+b)=bk(x-a)+ak(x-b)$$

que es la ecuación de una recta.

P7. Considere la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos VQ, donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.
Solución



Sea $M = (x_M, y_M)$ el punto medio de los trazos VQ. Sea $Q = (x_Q, y_Q)$ un punto sobre la hipérbola y sea V el vértice izquierdo de la hipérbola, entonces $V = (-a, 0)$.
M es el punto medio de los trazos VQ, luego $M = \frac{V+Q}{2}$, es decir

$$\begin{aligned} x_M =& \frac{x_Q - a}{2} \\ y_M =& \frac{y_Q}{2} \end{aligned}$$

despejando x_Q e y_Q

$$\begin{aligned} x_Q =& 2x_M + a \\ y_Q =& 2y_M \end{aligned}$$

dividiendo la primera por a y la segunda por b, elevando al cuadrado y restado las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

pero Q es un punto sobre la hipérbola, luego satisface su ecuación y por lo tanto

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = 1 = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

de donde

$$\frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2} = 1$$

reescribiendo esta ecuación

$$\left(\frac{x_M - (-a)}{a/2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{b/2}\right)^2 = 1$$

que corresponde a la ecuación de una hipérbola de semiejes $a/2$ y $b/2$ y centro $(-a, 0)$. Por lo tanto el lugar geométrico es una hipérbola.