MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A y Javier Santidrián.

Auxiliar 5:Extra

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \to B$. f es inyectiva cuando
$$(\forall x, y \in A)x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \to B$. f es sobreyectiva cuando
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \to B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto
$$Z(f) == \{x \in Dom(f) | f(x) = 0\}$$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
  - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B)x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A)f(-x) = x$
  - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A)f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A)f(x + p) = f(x)$

P1. Considere la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0, 0)$, $B(2p, 0)$, donde $p > 0$. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola, diferente del vértice, y L la recta tangente a la parábola por P
Considere que L tiene ecuación $y_0y = 2p(x + x_0)$(No lo demuestre, sólo úselo)

a) Calcule las distancias d_a y d_b desde A y B a la recta L y demuestre que $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$

Indicación: La distancia desde (α, β) a la recta $ax + by + c = 0$ vale $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

P2. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$
b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ r
c) $f(x) = |x^2| - 2$
d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

P3. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$
b) $g(x) = f(x + 1)$
c) $h(x) = f(|x|)$

P4. Sea las siguientes funciones analice sus características y luego grafiquelas:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$

P5. Considere la función f definida por $\dfrac{x}{x^2-1}$.Se pide

a) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

b) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(1 + x_2 \cdot x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{((x_1)^2 - 1)((x_2)^2 - 1)}$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f, indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

c) Calcule $f((1, \infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \iota(x) : (1, \infty) &\to f((1, \infty)) \\ x &\to \iota(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

d) Bosqueje el gráfico de f1027

Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto (x_0, y_0), tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0), como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima.
Nota:Utilice propiedades de parábolas.

1. Propuestos:

P6. Estudie inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{x^2+3x-1}{2x^2-5x+4}$

P7. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se defina la función $f_{a,b}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula:

$$f_{a,b}(x) = ax + b, x \in \mathbb{R}$$

a) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$

b) Si $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva y determine $f_{a,b}^{-1}$

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$

P8. Sea $f(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

a) Determine dominio, ceros, paridad y periodicidad de f

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

c) Bosqueje el gráfico de f y determine su recorrido

P9. Sea $f(x) = 6x^2 - x - 5$. Determine paridad, ceros, crecimiento, inyectividad, sobreyectividad y cuando corresponda, la inversa de las siguientes funciones:

a) $g(x) = f(f(x))$

b) $g(x) = f(x+1)$

c) $g(x) = f(|x|)$

d) $g(x) = |f(x-1)|$

e) $f(f(x+1) - f(|x|))$

P10. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función dada por:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

a) Determine el dominio de f.

b) Demuestre que f es par.

c) A partir de lo anterior, determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva

d) Determine la función inversa

e) Grafique.

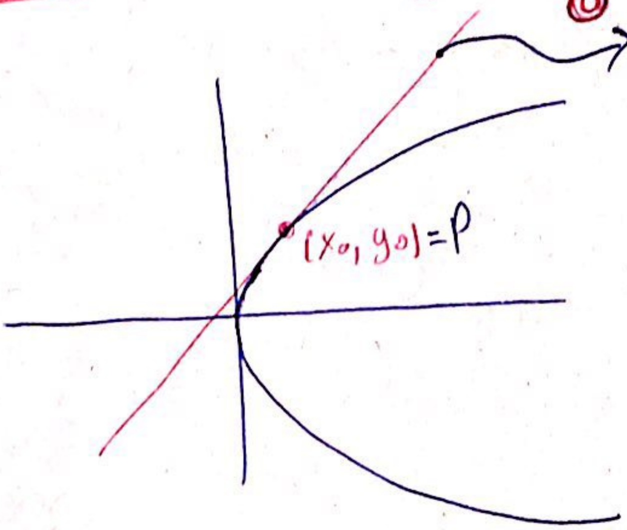
P11. Considere la función

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Pruebe que esta función satisface la identidad:

$$f(x+y) \cdot f(x-y) = f(2x) + f(2y)$$

P2.a|| Sea $\underline{y^2 = 4px}$ ⓪, $A(0,0)$, $B(2p,0)$



su ecuacióm es $y_0 y = 2p(x + x_0)$

Indicacióm:
sea (α, β) la distamcia a la recta $L': ax + by + c = 0$

$$d(P, L') = \frac{|a\alpha + \beta b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

PDQ $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$.

Calculemos $(d_a)^2$

sea $(\alpha, \beta) = (0,0)$ El pumto A y la recta tamgemte a la parábola

$$\underbrace{y_0 y}_{b} \underbrace{-2px}_{a} \underbrace{-2px_0}_{c} = 0$$

emtomces $d(A, L) = \dfrac{|0 \cdot -2p + 0 \cdot y_0 + -2px_0|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}}$

$$d(A, L) = |-2px_0| / \sqrt{4p^2 + y_0^2}$$

Al elevar al cuadrado.

$$\Rightarrow d_a^2 = \boxed{\frac{4p^2 x_0^2}{4p^2 + y_0^2}}$$

Calculemos $(\partial b)^2$

Sea $(\alpha, \beta) = (2p, 0) \in$ al punto B y la recta tangente a la Parábola

Los coeficientes de a, b, c se mantienen.

entonces $\partial(B,L) = \dfrac{|2p \cdot -2p + 0 \cdot y_0 + (-2px_0)|}{\sqrt{(-2p)^2 + y_0^2}}$

$$\partial(B,L) = \frac{|-4p^2 - 2px_0|}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}} = \frac{2p|2p + x_0|}{\sqrt{4p^2 + y_0^2}}$$

Al elevar al cuadrado.

$$\partial b^2 = \frac{4p^2(4p^2 + \overbrace{4px_0}^{ⓐ} + x_0^2)}{4p^2 + y_0^2}$$

ⓐ $x_0, y_0 \in$ Parábola $\Rightarrow y_0^2 = 4px_0$

$$\Rightarrow \partial b^2 = \frac{4p^2(4p^2 + y_0^2 + x_0^2)}{4p^2 + y_0^2}$$

$$\Rightarrow \partial b^2 - \partial a^2 = \frac{4p^2(4p^2 + y_0^2 + \cancel{x_0^2} - \cancel{x_0^2})}{(4p^2 + y_0^2)} = 4p^2 \frac{\cancel{(4p^2 + y_0^2)}}{\cancel{(4p^2 + y_0^2)}}$$

$$= 4p^2 \quad \boxtimes$$

Funciones: Características

Inyectiva

$f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

Sobreyectiva

$\forall y \in Cod, \exists x \in Dom, y=f(x)$

$\boxed{\text{álgebra}}$

$\rightarrow$ Aterrizar $\boxed{\text{Cálculo}}$

$Rec = Cod \iff$ Sobreyectiva

Biyectiva $\iff$ iny $\wedge$ sobrectivo

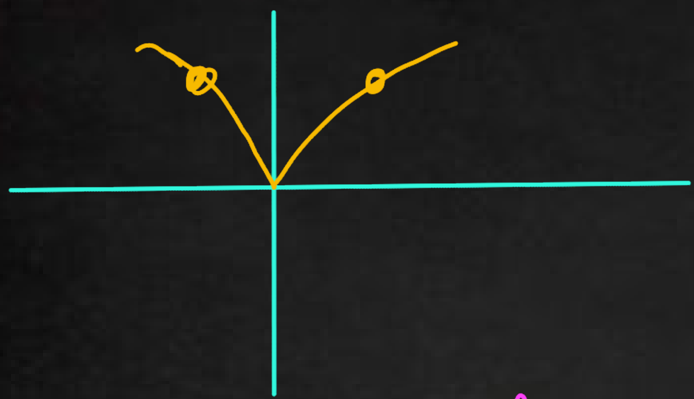
$\iff$ Existe inversa.

Ceros la función

$Z(f)=\{x \in Dom(f), f(x)=0\}$

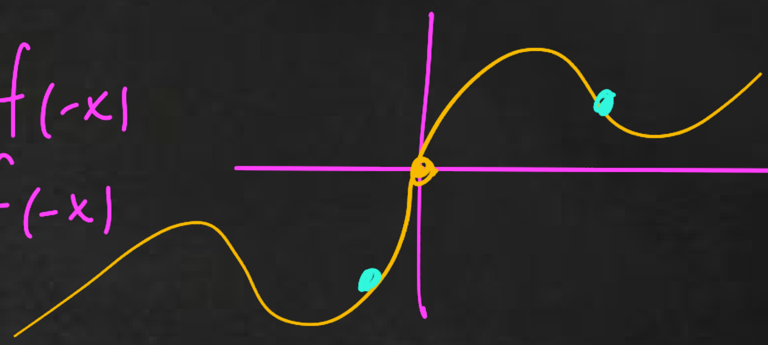
Paridad

Par $\iff f(x) = f(-x)$



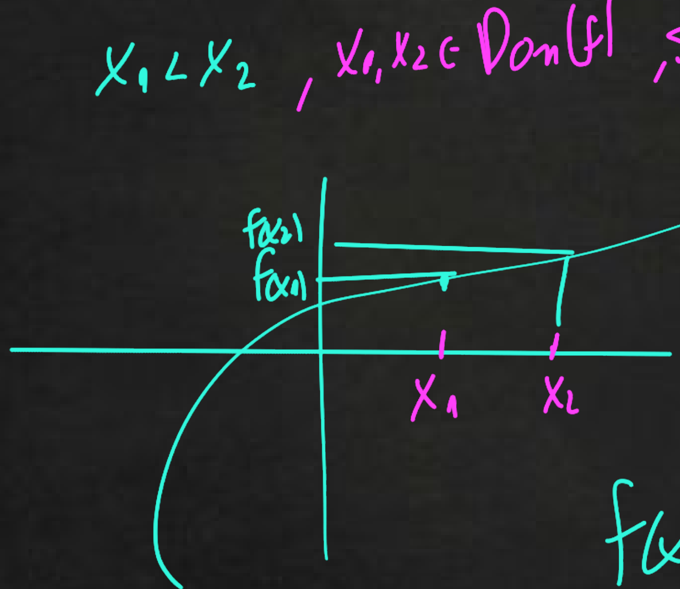
Impar $\quad f(x) = -f(-x)$

$\iff -f(x) = f(-x)$



Crecimiento funciones

Sea $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f)$, spg arbitrario



$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$	creciente
$f(x_2) - f(x_1) \leq 0$	decreciente

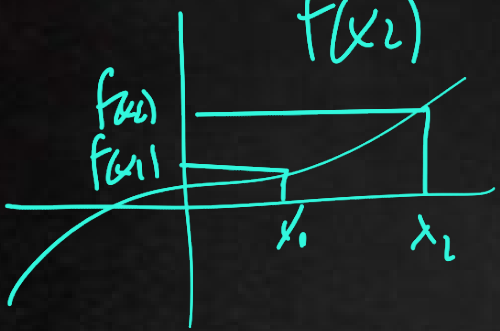
$f(x_2) \geq f(x_1)$

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

Recordemos que el crecimiento tiene 2 maneras de sacarse

$x_1 < x_2$, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \nearrow$
$\leq \searrow$

$x_1 < x_2$ $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} \leq 1$ creciente



$\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} \geq 1$ decreciente

Esta forma la recomiendo para fracciones, potencias

Veamos

PAR $\iff f(x) = f(-x)$

Impar $\iff f(x) = -f(-x)$

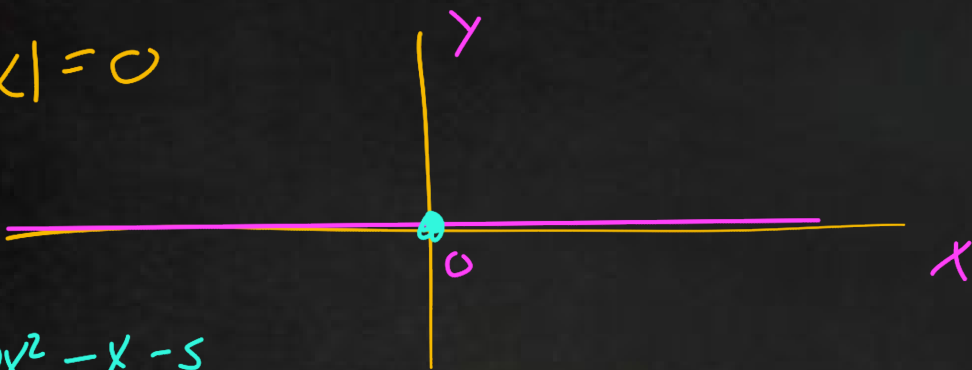
a) $6x^2 - x - 5 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(-x) = 6(-x)^2 - (-x) - 5$
  $= 6x^2 + x - 5 \neq f(x) \therefore$ No es PAR

- $-f(-x) = -\left(6(-x)^2 - (-x) - 5\right)$
  $= -6x^2 - x + 5 \neq f(x) \therefore$ No es Impar

Existe función par e Impar a la vez?

$f(x) = 0$



$f(x) = 6x^2 - x - 5$

b) $f(x+1)$ es par o Impar

$$f(x+1) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$$
$$= 6(x^2+2x+1) - x - 1 - 5$$
$$= 6x^2 + 12x + 6 - x - 1 - 5$$
$$f(x+1) = \underbrace{6x^2 + 11x}_{g(x)} \neq f(x)$$

PAR: $g(x) = g(-x)$

$$g(-x) = 6(-x)^2 + 11(-x) = 6x^2 - 11x \neq g(x)$$

$\therefore$ No es par

Impar: $g(x) = -g(-x)$

$$-g(-x) = -(6(-x)^2 + 11(-x)) = -6x^2 + 11x \neq g(x)$$ $\therefore$ No Impar

c) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

$$f(|x|) = 6|x|^2 - |x| - 5 = h(x)$$

$\boxed{-h(-x) = h(x) \quad \text{IMPAR}}$ $\qquad |x| = |-x|$

$$-\left(6|-x|^2 - |-x| - 5\right) = -h(-x)$$

$$= -6|x|^2 + |x| + 5 \neq h(x) \quad \therefore \quad \text{No IMPAR}$$

PAR $\quad h(x) = h(-x)$

$$h(-x) = 6|-x|^2 - |-x| - 5$$

$$= 6|x|^2 - |x| - 5 = h(x)$$

$\therefore$ Es PAR

En un comienzo $f(x) = 6x^2 - x - 5$, luego

$f(|x|) = 6|x|^2 - |x| - 5$, 1) Caso $x \geq 0$

2) Caso $x < 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \text{ Caso} \quad \text{con} \quad x \geq 0 \\ \Rightarrow 6|x|^2 - |x| - 5 = 6x^2 - x - 5 = (\quad)(\quad) \end{array}}$$

2 Caso $\quad x < 0$, $\quad 6|x|^2 - |x| - 5 = 6(-x)^2 - (-x) - 5$

$= 6x^2 + x - 5$

Caso 2   Caso 1

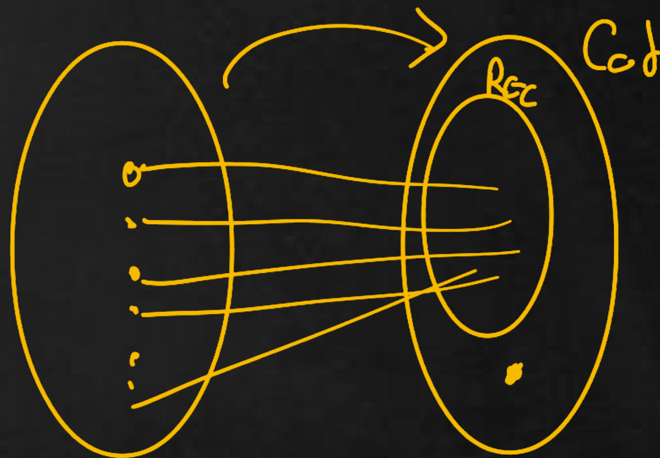
Inserte dibujo

$$f: \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}-\{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

Dom   Rec $\neq$ Cod

Donde llegó realmente / lugares donde pudo haber llegado

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$Dom(f) = \mathbb{R}-\{0\}$

Paridad, $f(x) = f(-x)$

$f(-x) = \frac{1}{-x} \neq f(x)$ $\therefore$ No PAR

Imparidad $f(x) = -f(-x)$

$$-f(-x) = -\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{1}{x} = f(x)$$

$\therefore$ Es Impar

La inyectividad

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
$$p \Rightarrow q$$
$$V \Rightarrow q$$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow V$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \quad , x, y \neq 0$$

$\Rightarrow x = y$ $\therefore$ Inyectiva en su dominio

Veamos el Rec. $\mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$

$$\text{Rec} \neq \text{Cod}$$

$\therefore$ No es sobreyectiva

$$Z(f) = \emptyset$$

$f(x) = \dfrac{1}{|x|} \quad , x \neq 0$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Paridad, $f(-x) = \dfrac{1}{|-x|} = \dfrac{1}{|x|} = f(x)$

$\therefore$ PAR

Imparidad $-f(-x) = \dfrac{-1}{|-x|} \neq f(x)$ No IMPAR

Inyectiva

$\forall x, y \in Dom(f)$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Contraejemplo porque estoy negando un $\forall$

$x = 2 \quad , \quad y = -2$

$f(2) = \dfrac{1}{|2|} = \dfrac{1}{2}$

$f(-2) = \dfrac{1}{|-2|} = \dfrac{1}{2}$

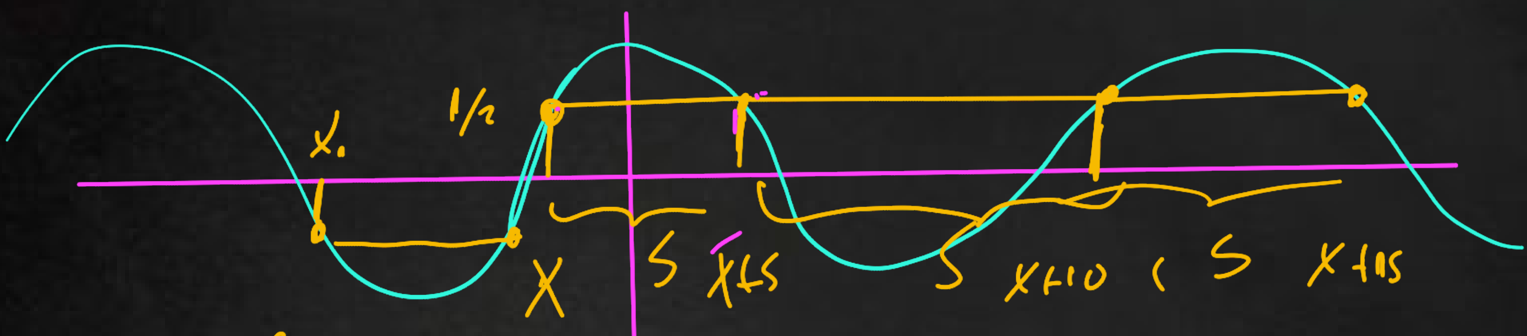
$\Rightarrow x \neq y \quad \therefore$ No inyectiva

No Biyectiva, porque No inyectiva

Periodicidad.

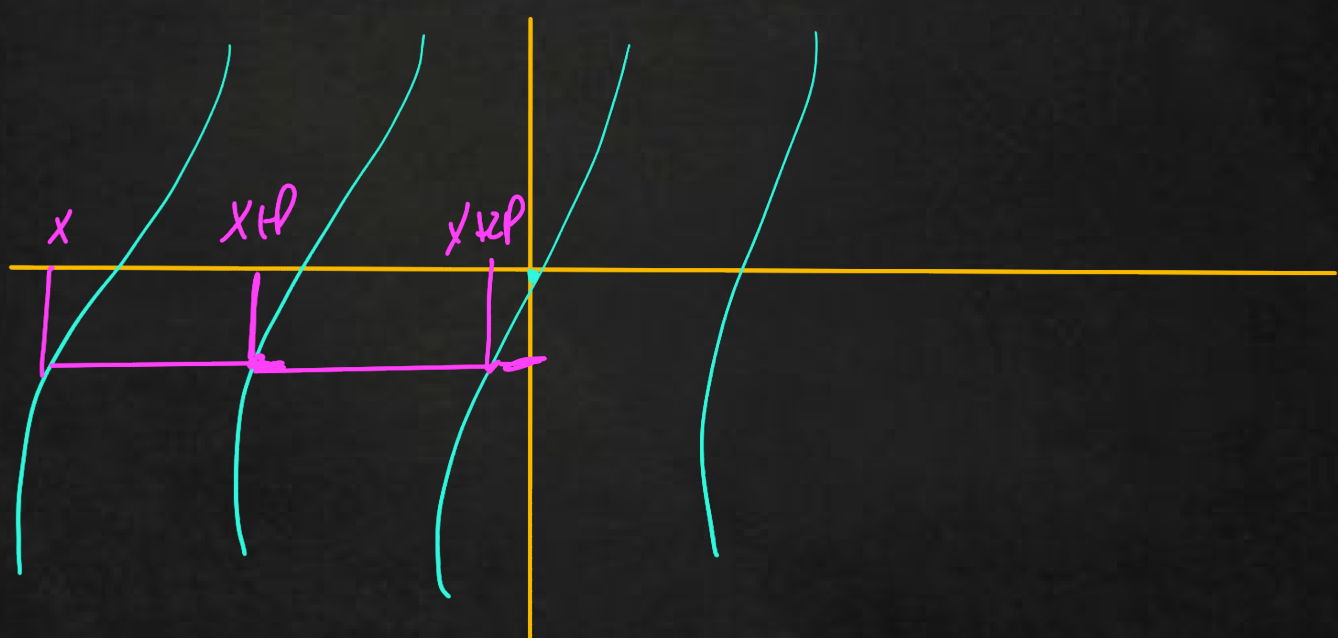
$\forall x \in \mathrm{Dom}(f), \exists\, p > 0$

tq $f(x) = f(x+p)$



$f(x_1)$
$= f(x_1+5)$

$f(x) = f(x+p)$



1) $f(x) = 6x^2 + 2x$

2) $g(x) = f$

3) $h(x) = x - [x]$ (Parte entera) (Cajón)

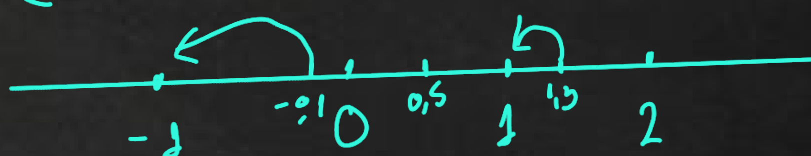
"El mayor entero menor o igual"

$[1.3] = 1$

$[0.5] = 0$

$[5.0] = 5$

$[-0,1] = -1$



$f(x) = f(x+p)$ debo probarlo, $p > 0$

$f(x) = 6x^2 + 2x$

$\boxed{f(x+p) = f(x)}$ Impongo esta igualdad

p válido significa periódica de periodo p

p no válido significa No periódica

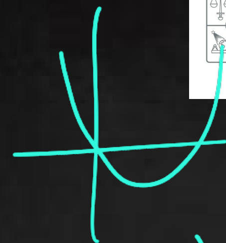
Contradicción (Algo falso), $x = 0$, porque es $\forall x$ Dom

$6(x+p)^2 + 2(x+p) = 6x^2 + 2x \Rightarrow 6p^2 + 2p = 0$

$6(x^2 + 2xp + p^2) + 2x + 2p = 6x^2 + 2x$ $\quad p(6p + 2) = 0$

$\cancel{6x^2} + 12xp + 6p^2 + \cancel{2x} + 2p = \cancel{6x^2} + \cancel{2x}$

$p(12x + 6p + 2) = 0$

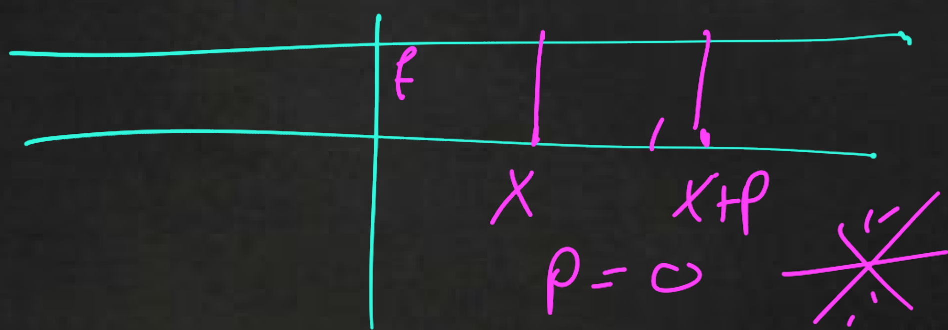


$p = 0$ Falso $\Rightarrow$ No periodica

$g(x) = f$ $\quad p > 0$

$\boxed{g(x+p) = g(x)}$

$f = f \iff$ ✓

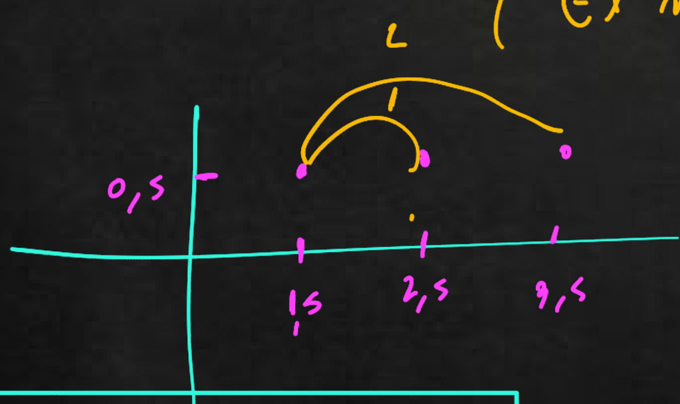


No es periodica

$h(x) = x - [x]$ (parte entera)

(El mayor entero menor o igual)

$[1.3] = 1$



$7,5 - [7,5] = 0,5$

$0,3 - [0,3] = 0,3$

$1,8 - [1,8] = 0,8$

$6,5 - [6,5] = 0,5$

$\boxed{h(x) = h(x+p)}$

$\cancel{x} - [x] = \cancel{x} + p - [x+p]$, $\forall x \in Dom$

$-[0] = p - [0+p]$, $x = 0$

$-0 = p - [p]$

$[p] = p$, $p \in \mathbb{Z}^+$

Periodo minimo es el $p > 0$ más chico

$p = 1$

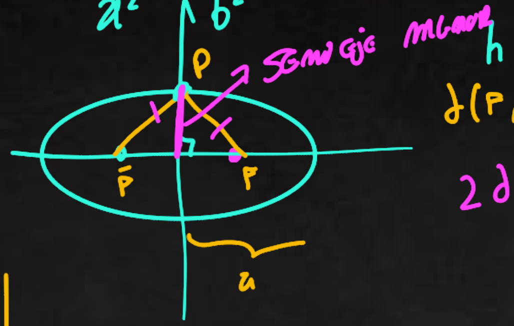
Historia $\Rightarrow$ participa por un brownie y Pato punto

Volvimos! últimos 30 seg

Para próxima aux ♡

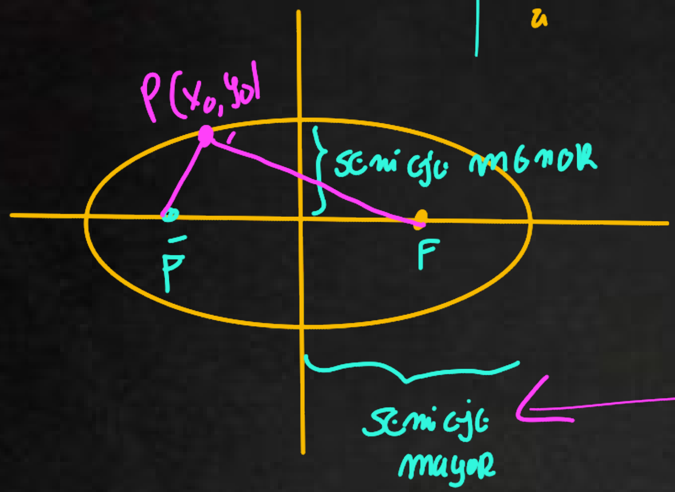
Hola, Ahora Elipse!

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$d(F,P)+d(\bar F,P)=2a$$

$$2d(F,P)=2a$$



$$\boxed{d(P,F)+d(P,\bar F)=2a}$$

$$=2\cdot$$

P1. [Elipses y rectas]C2-MA1001-2015.P1

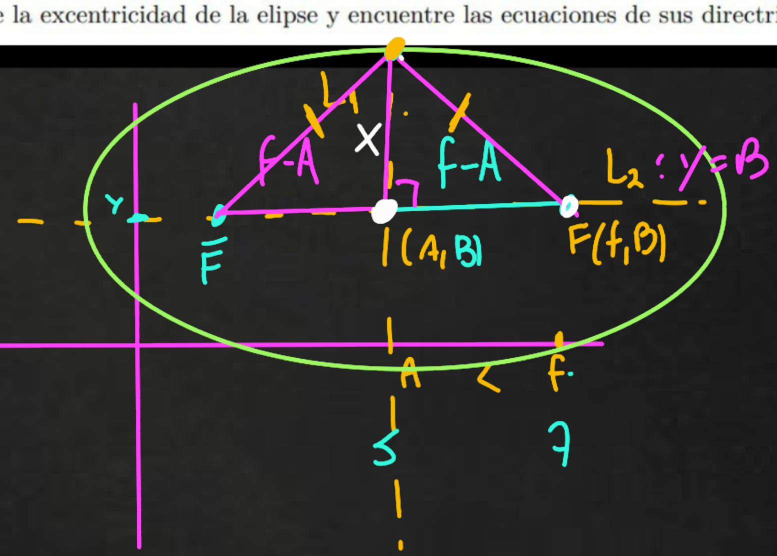
Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2, donde $f > A$ .Si $\bar F$ es el simétrico de F con respecto a la recta L_1, encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y $\bar F$ y cuyo semieje mayor mide a, donde $a > f - A$

Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

1) L_1: $x=A$

2) L_2: $y=B$

3) $a>f-A$



foco derecha

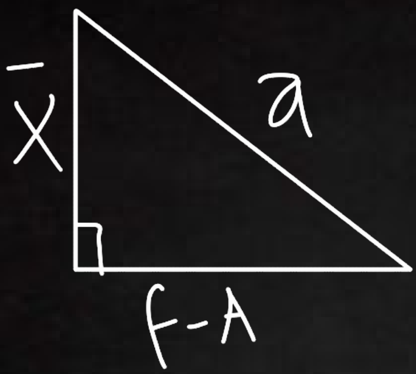
$$F(f,B) \Rightarrow \bar F(f-(f-A)-(f-A),B)$$

$$\bar F(2A-f,B)$$

$$d(P,F)=d(P,\bar F),$$

$$d(P,F)+d(P,\bar F)=2a$$

$$\cancel{2}\,d(P,F)=\cancel{2}a,\quad \boxed{d(P,F)=a}$$



Pitágoras

$$\bar{x}^2 + (f-A)^2 = a^2$$

semi eje menor $= \bar{x} = \sqrt{a^2 - (f-A)^2}$

$\therefore$ la ecuación de la elipse

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\[2ex] \bar{x} = b = \sqrt{a^2-(f-A)^2} \\[2ex] \Rightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-(f-A)^2} = 1} \end{array}\right\} \text{Caso Centrado}$$

Como la elipse está centrada (A, B)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{a^2-(f-A)^2} = 1}$$

Excentricidad

$$\boxed{e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} = \frac{\sqrt{a^2-(a^2-(f-A)^2)}}{a}$$

Formula

$$= \frac{f-A}{a} < 1 \quad \therefore \text{Elipse}$$

$$a > f-A \Rightarrow$$

$$\boxed{\text{directrices} \quad A \pm \frac{a}{e}}$$

(x_0, y_0)
centro
$x_0 = A$

$$A \pm \frac{a}{\frac{f-A}{a}} = A \pm \frac{a^2}{f-A}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Inyectividad

Sea $f: A \to B$,
$\forall x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sobreyectiva

$\forall y \in B,\ \exists x \in,\ y = f(x)$

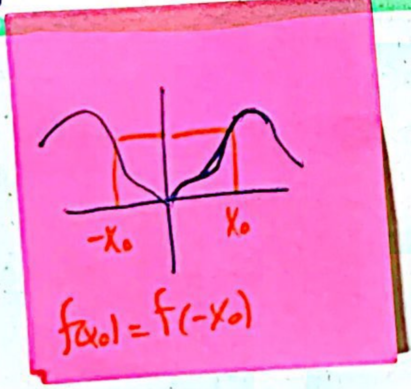
Lo importante
Es la interpretación
Rec = Cod
$\Downarrow$

Biyectiva $\Leftrightarrow$ inyectiva $\wedge$ sobreyectiva

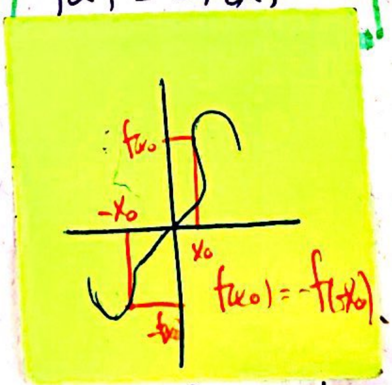
1 a 1 | Rec = Cod

Ceros: $Z(F) := \{x \in Dom(f),\ f(x) = 0\}$

Par: Sea $f(x)$, $f(x) = f(-x)$

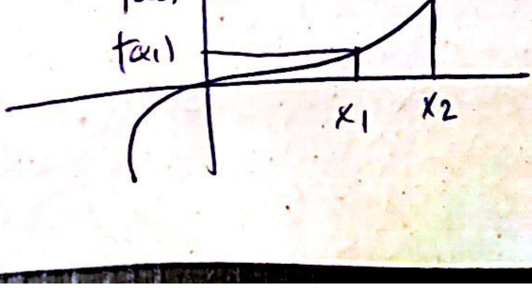


Impar: Sea $f(x)$
$f(x) = -f(-x)$



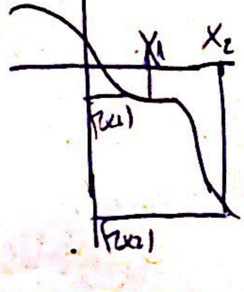
Crecimiento: Sea $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

creciente
(no necesariamente estricto.)

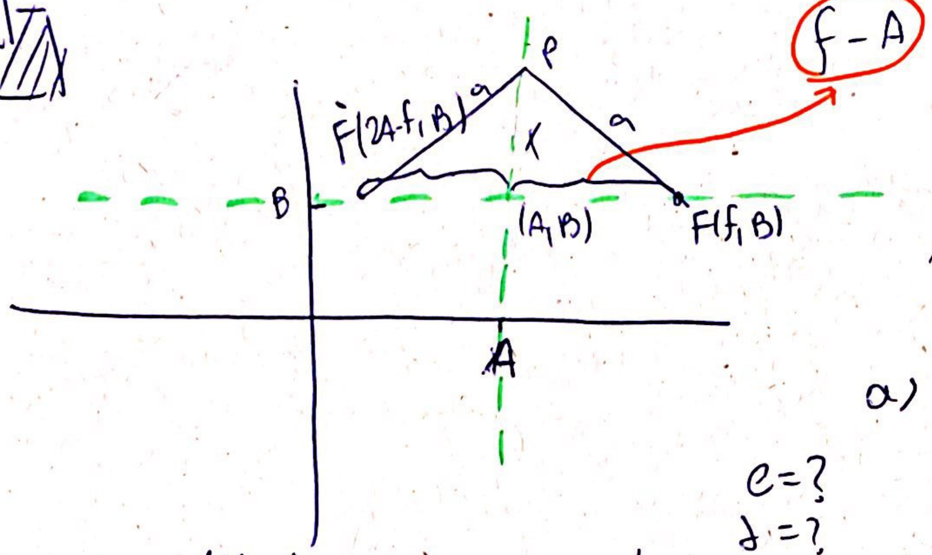


$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

decreciente.



P1)



$f-(f-A)-(f-A)$

$\cancel{f}-\cancel{f}+A-f+A$

$\underline{2A-f}$ ||

$a > f-A$

$e = ?$

$d = ?$

C(A, B). // Calculamos con pitágoras el valor del semieje menor.

$$x^2+(f-A)^2=a^2$$

$$x=\sqrt{a^2-(f-A)^2} \qquad \underline{x>0}\,|$$

=> Ecuación $\displaystyle \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-(f-A)^2}=1$ ||

$a > f-A$

$1 > \frac{f-A}{a}$ ||

$$\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2-(a^2-(f-A)^2)}}{a}=\frac{f-A}{a}<1$$ ||

directrices $A \pm \frac{a}{e}$ (?)

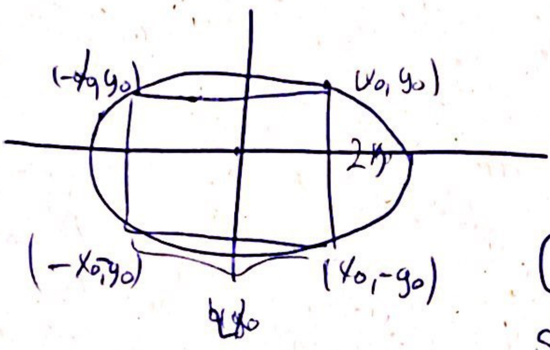
$$A \pm \frac{a}{\frac{1}{\frac{f-A}{a}}} = A \pm \frac{a^2}{f-A}$$ //

Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, encontrar el punto (x_0,y_0), tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0,y_0), como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima.

Nota:Utilice propiedades de parábolas.

P2) 1.-

1/2) $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Encontrar (x_0, y_0)



$A(x_0, y_0) = 4x_0y_0.$

Como es una función siempre positiva

Es equivalente a maximizar su cuadrado

$$A^2(x_0, y_0) = 16 x_0^2 y_0^2.$$

También tomemos $x_0, y_0 \in E$.

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) b^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$$

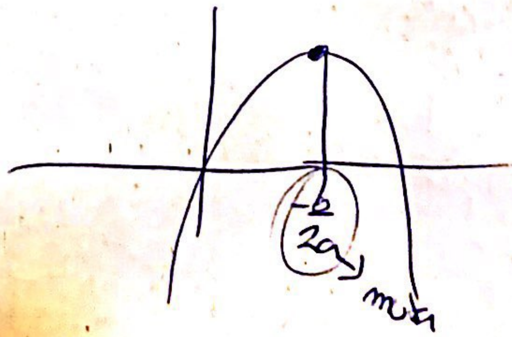
Solo ordenar términos

En el cuadrado

$$\Rightarrow A^2(x_0) = 16 \cdot x_0^2 \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$$

$$= 16 b^2 x_0^2 - 16 \frac{b^2}{a^2} x_0^4 \qquad \lambda = x_0^2$$

$$\Rightarrow = 16 b^2 \lambda - 16 \frac{b^2}{a^2} \lambda^2.$$



$$-\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-16b^2}{-2 \cdot 16 \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{a^2}{2a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

P3) Determinar dominio

Lo primero y más importante es saber las restricciones,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow Q(x) \neq 0, \ \forall x \in \text{Dom}$$

$$\sqrt[2n]{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0 \ \forall x \in \text{Dom}.$$

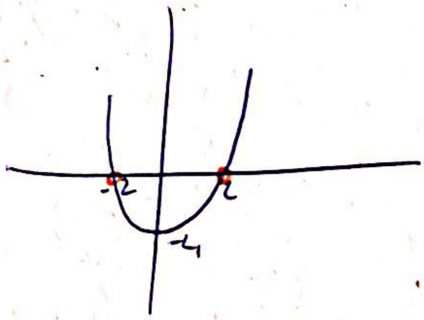
Si tengo combinado $\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ aplico ambas condiciones.

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$\boxed{x \neq \pm 2}$



$\Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \neq 0$

$\boxed{x \neq 1}$

$\downarrow$

Tabla signos!! $Sol_2: \mathbb{R} - \{1\}$

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … ∞
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$Sol_1: (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$Sol_1 \cap Sol_2 = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

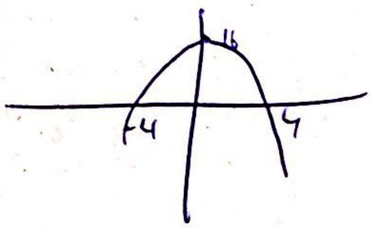
c) $f(x) = |x^2| - 2$

El valor absoluto tiene restricción?

No! !! Sol: $\mathbb{R}$ //

d) $\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow 16 - x^2 \geq 0$

$16 \geq x^2$ X no hacer eso



$\Rightarrow 16 - x^2 \geq 0$

$(4-x)(4+x) \geq 0$

	$-\infty$	-4	4	∞
$(4-x)$		$+$	$+$	$-$
$(4+x)$		$-$	$+$	$+$
		$-$	$+$	$-$

$[-4, 4]$: Sol //

P4) Para la paridad

- Par ssi $f(x) = f(-x)$
- IMPAR ssi $f(x) = -f(-x)$

Ojo los signos.

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

Veamos $f(-x)$

$6(-x)^2 - (-x) - 5$

$6x^2 + x - 5 \neq f(x)$ No es par

Veamos $-f(-x)$

$-(6(-x)^2 - (-x) - 5) =$

$= -6x^2 - x + 5 \neq f(x)$ No es impar

b) $f(x+1) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$

$= 6(x^2 + 2x + 1) - (x+1) - 5$

$f'(x) = 6x^2 - 11x$ //

Veamos $f(-x)$

$f(-x) = 6(-x)^2 - 11(-x) = 6x^2 + 11x \neq f(x)$ No es par

Veamos

$-f'(-x) = -(6(-x)^2 - 11(-x)) = -6x^2 - 11x \neq f(x)$ No es IMPAR

c) $f(|x|) = 6(|x|)^2 - |x| - 5$

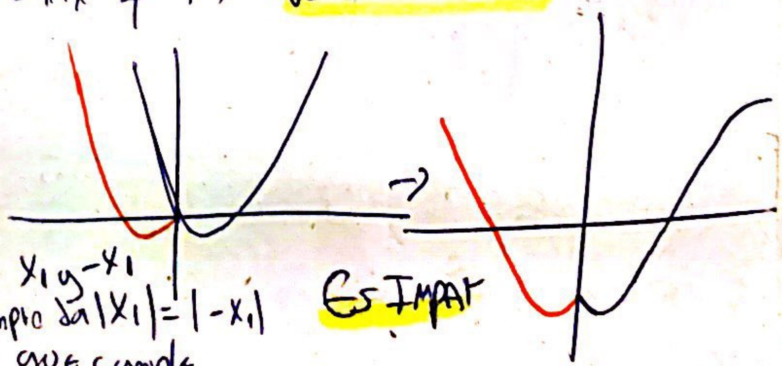
↳ solo este cambia

Veamos $f(-x)$

$6(|-x|)^2 - |-x| - 5$

dado x y $-x$, siempre da $|x| = |-x|$

Así que cumple



Es IMPAR

$f'(x) = 6|x|^2 - |x| - 5$

$-f(-x) = -6x^2 + |x| + 5 \neq f'(x)$ No es Impar

Ceros

a) $6x^2 - x - 5 = 0$

$(6x+5)(x-1) = 0$

$\dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot -5}}{12} = \dfrac{1 \pm 11}{12} < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{5}{6} \end{matrix}$

$Z(f) = \{ -\frac{5}{6}, 1 \}$

Ahora es Biyectiva? Iny ∧ Sobre

tampoco

$x = -\frac{5}{6} \wedge x = 1$

$\Rightarrow f(-\frac{5}{6}) = f(1) = 0$

$\forall y \in B, \exists x \in Dom f)$

No cumple $f^{-1}(-\infty, -5), \nexists x \in Dom f$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ X No cumple

$6x^2 - x - \cancel{5} = 6y^2 - y - \cancel{5}$

Polinomio grado a grado

$\cancel{6}x^2 = \cancel{6}y^2 \wedge x = y$

$x = \pm y$

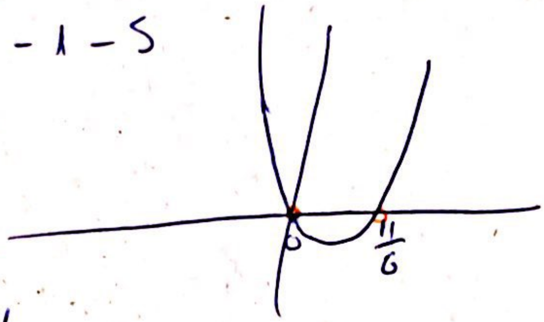
$\Rightarrow$ No Biyectiva pues no inyectiva ∧ no Sobre.

b) $f(x+1)$

$f'(x) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$

$f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 - x - 1 - 5$
$= 6x^2 - 11x = f'(x)$

$x(6x - 11) = 0$



$Z(f) = \{0, 11/6\}$

Biyectiva? No pues no cumple inyectividad

c) $6(|x|)^2 - |x| - 5 = 0$

$6(x^2) - |x| - 5 = 0$

si $x > 0$

$6x^2 - x - 5 = (6x + 5)(x - 1)$

sol $-\frac{5}{6}$, 1
$\notin \mathbb{R}^+$ $\in$ Dom $\mathbb{R}^+$

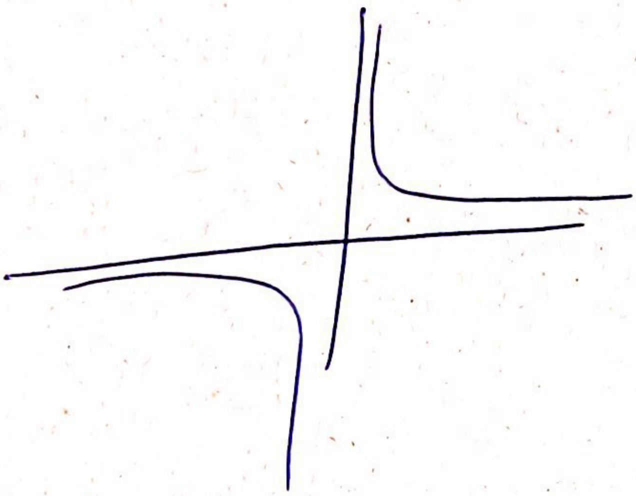
si $x < 0$

$6x^2 + x - 5 = (6x - 5)(x + 1)$

sol -1, $\frac{5}{6}$
$\in \mathbb{R}^-$ $\cancel{\in} \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow Z(f) = \{-1, 1\}$. No Biyectiva por inyectividad y sobre.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$



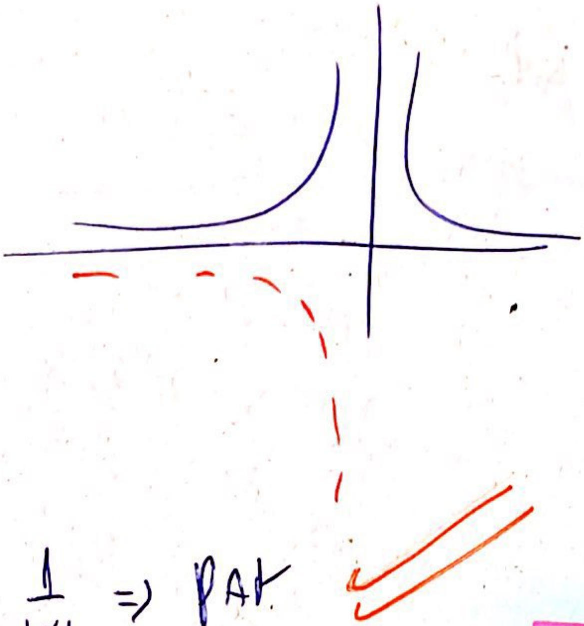
Cómo vemos esto.

- $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{(-x)}$ Es Impar.
- Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$
- $f(x) = f(y)$

  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$ Inyectiva //
- Rec: $\{\mathbb{R} - \{0\}\} \neq \{Cod = \mathbb{R}\}$ No sobreyectiva
- $Z(f) = \emptyset$
- Asíntota. $x=0$ Horizontal
  $y=0$ Vertical

Al revés casi

b) $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$



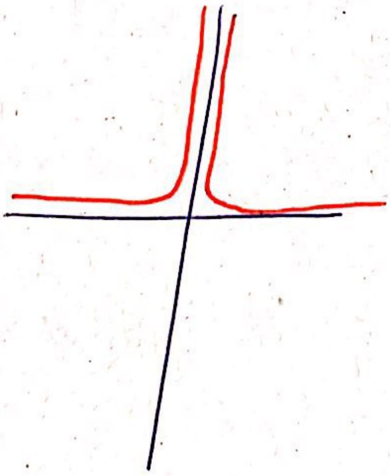
- **Dom** $= \mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas** $x = 0$, $y = 0$
- **Paridad**

$f(x) = f(-x) \Rightarrow \dfrac{1}{|-x|} = \dfrac{1}{|x|} \Rightarrow$ PAR

- No biyectiva, pues no inyectiva
- $Z(f) = \phi$.

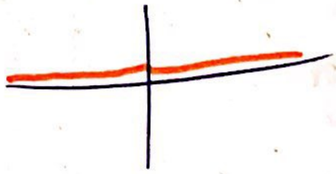
Puede ser útil por cortes con los ejes cuando haya.

c) $\dfrac{1}{x^2} = f(x)$

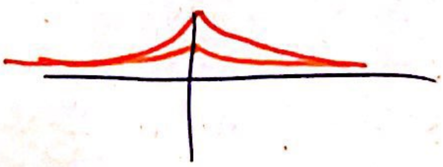


#Verificar

d) $f(x) = \dfrac{1}{|x|+2}$ → si sumo más al denominador



si sumo menos



¿Y si resto?

P6 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Dom f $x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq +1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ cumple

$x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Dom $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Paridad

$f(x) = f(x)$?

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x}{x^2 - 1} \neq f(x)$

$\therefore$ No es par

$-f(x) = -\left(\dfrac{-x}{(-x)^2 - 1}\right) = \dfrac{x}{x^2 + 1} = f(x)$

$\therefore$ Es par

Ojo con los signos

Par $\wedge$ IMPAR

$\exists ! f, \in \mathbb{F} \setminus f(x) = 0$

• Signos

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

	$-\infty$	-1	0	$+1$	∞
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
	$-$	$+$	$-$	$+$	

$f(x) > 0$ si $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ //

• Asíntota

Verticales — indeterminaciones.

$x = -1 \wedge x = 1$

horizontales

¿qué ocurre si avanzo hacia los extremos?

$y = 0$ ||

b) $f(x_2)-f(x_1) = \dfrac{(1+x_2x_1)(x_1-x_2)}{((x_1)^2-1)(x_2^2-1)}$

$$\frac{x_2}{x_2^2-1} - \frac{x_1}{x_1^2-1} = \frac{x_2(x_1^2-1) - x_1(x_2^2-1)}{((x_1^2)-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{x_2x_1^2 - x_2 - x_1x_2^2 + x_1}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2) + x_1x_2(x_1-x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} \;//$$

Como f impar basta estudiar $\nearrow$ v $\searrow$ en un intervalo.

Si $x \in (0,1)$ y $x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{\ominus \cdot \oplus}{\ominus\ \ominus} = \ominus = f(x_2)-f(x_1) < 0$$

$\therefore \searrow //$ Además $f(x) < 0$

Si $x \in (1,\infty) \wedge x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{\ominus\ \oplus}{\oplus\ \oplus} = \ominus = f(x_2)-f(x_1)$$

$\therefore \searrow$ Además $f(x) > 0$

Como es impar análogo

Si $x \in (-1,0)$ ↙ pero ahora $f(x)>0$

si $x \in (-\infty,-1)$ ↙ pero ahora $f(x)<0$

c) $f(1,\infty)$

$l(x): (1,\infty) \to f(1,\infty)$
$x \to l(x) := f(x)$

Es sobreyectiva por definición
Luego $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$
$f(x)-f(y)=0 \Rightarrow x=y$ ssi inyectiva

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-\cancel{1})(x_2^2-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)(1+xy)}{(x^2-1)(y^2-1)}=0$$

ssi $1+xy=0 \lor x-y=0$
$x=\frac{-1}{y}$ $\quad x=y$

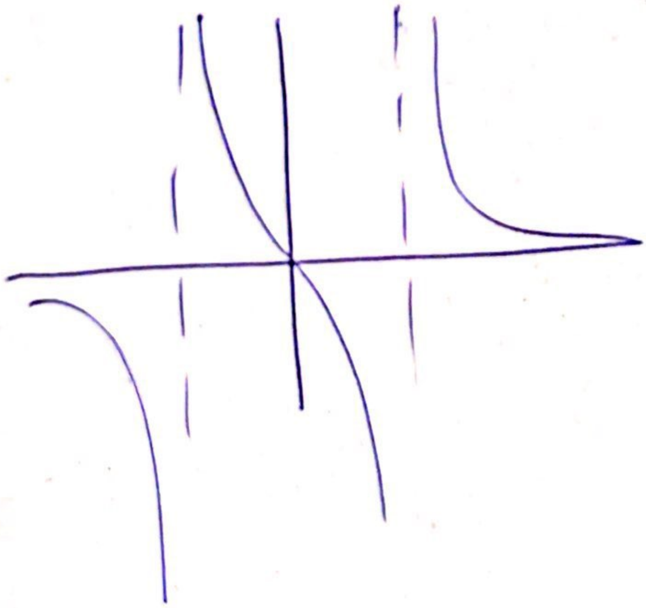
$\notin$ Dom $\Rightarrow \underline{x=y}$

Luego su inversa

$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$yx^2 - y - x = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2 + 4y \cdot y}}{2y}$$ cambio variables



Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl