Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
23 de Abril del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 6

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Considere la función

$$f(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

Encuentre dominio, signos, ceros, paridad, periodicidad e inyectividad.
Solución

(a) **Dominio:** Para encontrar el dominio, notamos que en los únicos puntos en donde puede haber problemas, son en los que el denominador se anula. Para buscarlos, debemos resolver la ecuación $1-\cos x = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Concluimos que el dominio f es el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) **Signos:** Notemos que dado que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \operatorname{sen} x \in [-1, 1]$ y $\cos x \in [-1, 1]$, tenemos que $1 + \sin x \in [0, 2]$ y que $1 - \cos x \in [0, 2]$. Luego, f es no negativa, por ser cuociente de funciones no negativas.

(c) **Ceros:** Necesitamos encontrar todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = 0$. Para ello, debemos resolver la ecuación en A

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \\ &\Leftrightarrow 1 + \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En consecuencia los ceros de f son $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) **Paridad:** Afirmamos que f no es par ni impar. En efecto, aunque el dominio es simétrico, sus ceros no lo son (p.ej. $\frac{3\pi}{2}$ es un cero pero $-\frac{3\pi}{2}$ no lo es). Luego, $\forall x \in Z \quad \pm f(x) = 0 \neq f(-x)$.

(e) **Periodicidad:** Vemos que f debe ser al menos 2π-periódica, pues es cuociente de funciones 2π-periódicas. Recordemos que la definición de periodo es el menor $p \in \mathbb{R}$ tal que $f(x + p) = f(x)$. Veamos que no hay $p < 2\pi$ que cumpla lo anterior. Razonemos por contradicción:

Supongamos que f tiene periodo $p \in (0, 2\pi)$. Luego, para cualquier $x \in A$ debe cumplirse que $f(x + p) = f(x)$, en particular para $x = \frac{3\pi}{2}$. Pero si resolvemos la ecuación para p obtenemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2} + p\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &\Leftrightarrow \frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + p\right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + p = \frac{3\pi}{2} \quad (\star) \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Contradicción, pues supusimos que $0 < p$. Luego, concluimos que f es 2π-periódica.
Nota $(\star)$: *Aquí descartamos las soluciónes de la forma* $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, *pues sólo necesitamos soluciones* $p < 2\pi$.

(f) **Inyectividad:** Notamos que f no es inyectiva pues $\forall x \in A,\ f(x + p) = f(x)$.
Nota: Toda función periódica, en donde el dominio contenga a x *y a* $x + p$ *(por lo menos), es no inyectiva.*

P2. (a) Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$.
Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
Solución

Vemos que la indicación no sirve mucho como viene, trabajemosla un momento entonces. Notemos que si cambiamos b por $-b$ obtenemos que

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\bullet)$$

y entonces ahora sí podemos aplicar la fórmula a la ecuación. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0 \\ &\overset{(\bullet)}{\Leftrightarrow} (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 0 \end{aligned}$$

Recordando que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) - (\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\cos x + \operatorname{sen} x - 1)}_{(1)}\underbrace{(\cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)}_{(2)} = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$, obtenemos dos ecuaciones. Resolviendo (1)=0:

$$\cos x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \operatorname{sen} x = 1$$

Notemos que esta ecuación sólo tiene solución cuando $\cos x = 1 \wedge \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$ o $\operatorname{sen} x = 1 \wedge \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Así, determinamos un conjunto solución $Z_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$. Resolvamos ahora (2)=0:

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x &\Leftrightarrow 1 - \cos x \operatorname{sen} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x \operatorname{sen} x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 2 \end{aligned}$$

Dado que $|\operatorname{sen}\alpha| \leq 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$, concluimos que el conjunto solución de esta ecuación es $Z_2 = \phi$.
De todo lo anterior deducimos que los ceros de la función están en el conjunto

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

(b) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\operatorname{cotg}(3x) - \operatorname{cotg}(x)} = \operatorname{cotg}(2x)$$

Solución
Primero veamos la siguiente identidad

$$\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(3x - x) = \frac{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)}{1 + \operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}$$

y recordando que

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\operatorname{cotg}(3x)-\operatorname{cotg}(x)} &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}(3x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}-\frac{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)-\operatorname{tg}(3x)}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}+\frac{\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}\\
&= \frac{1+\operatorname{tg}(3x)\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x)-\operatorname{tg}(x)}\\
&= \frac{1}{\operatorname{tg}(2x)}\\
&= \operatorname{cotg}(2x)
\end{aligned}
$$

P3. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\sec^2\frac{x}{2}+\cos x\tan\frac{x}{2}-\operatorname{sen} x=0$$

Solución
Para simplificar un póco los cálculos, haremos el cambio $x = 2\alpha$. A primera vista parece que el cambio no ayuda mucho, pero nos permite escribir la expresión en términos de ángluos dobles, que tienen identidades más fáciles. Además notemos que como aparecen $\sec x$ y $\tan x$, se subentiende que estamos en un dominio tal que tiene sentido hablar de $\frac{1}{\cos x}$. Dicho esto, desarrollemos la expresión

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\sec^2\frac{x}{2}+\cos x\tan\frac{x}{2}-\operatorname{sen} x &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\sec^2\alpha+\cos 2\alpha\tan\frac{\alpha}{-}\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\sec^2\alpha+(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)\tan\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\alpha}\frac{1}{\cancel{\cos^2\alpha}}+\cancel{\cos^2}\alpha\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}-\operatorname{sen}^2\alpha\tan\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \tan\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\tan\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \tan\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha)+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \tan\alpha\cos^2\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cancel{\cos^2}\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= \operatorname{sen} 2\alpha-\operatorname{sen} 2\alpha\\
&= 0
\end{aligned}
$$

P4. Demuestre que $\forall\beta\gamma\in\mathbb{R}$ se cumplen las siguientes igualdades:

(a) $\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma=\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma))$
Solución
Si partimos por la derecha, utilizando la identidad $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)) &= \frac{1}{2}(\cancel{\cos\beta\cos\gamma}+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma-\cancel{\cos\beta\cos\gamma}+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma)\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\\
&= \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma
\end{aligned}
$$

(b) $\operatorname{sen}\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\beta-\gamma))$

Solución

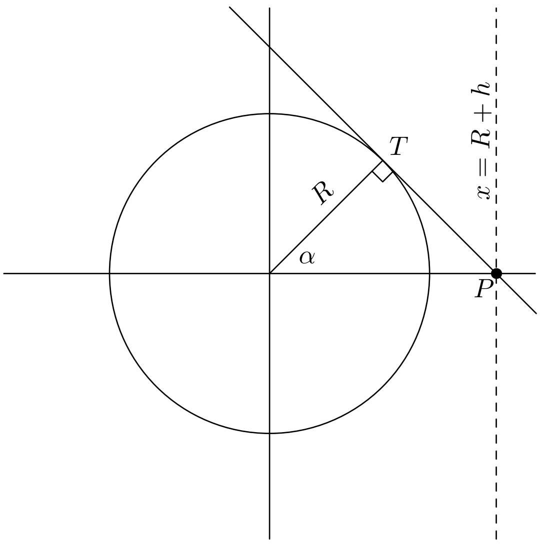
Si partimos por la derecha, utilizando la identidad $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x\cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\beta+\gamma)+\operatorname{sen}(\beta-\gamma)) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cancel{\cos\beta\operatorname{sen}\gamma} + \operatorname{sen}\beta\cos\gamma - \cancel{\cos\beta\operatorname{sen}\gamma})\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\beta\cos\gamma\\ &= \operatorname{sen}\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

P5. Suponga que usted está parado a una altura h sobre el nivel del mar, mirando al horizonte. Suponga que la Tierra es una circunferencia de radio R. Calcule la cantidad máxima de kilómetros que es posible ver, es decir, el largo del arco de circunferencia que es posible ver.

Solución

Supongamos que nos encontramos parados en un punto P en el espacio. Para simplificar las cosas, tomaremos los ejes coordenados centrados en el centro de la Tierra, y pondremos el punto P sobre el eje OX. Sabemos que el largo de un arco de circunferencia se calcula como $R\cdot\alpha$, donde R es el radio de la circunferencia y α es el ángulo que subtiende el arco. Entonces, necesitamos calcular el ángulo que forma la recta que pasar por el punto P y la tangente a la Tierra que pasa por P. El punto de tangencia T es donde termina la línea visual de la persona. Tenemos entonces la siguiente situación



Como se ve en el dibujo, $\overline{OP} = R+h$, $\overline{OT} = R$. Sabemos que el radio siempre es perpendicular a una tangente en su punto de intersección; hemos formado un triángulo rectángulo. Entonces tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{R}{R+h}$$

y aplicando inversa

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

Por tanto, la distancia que es posible ver es

$$R\cdot\alpha = R\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$