MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023
Profesor: Leonardo Sánchez Cancino
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón

Auxiliar 8: Preparación C3 (Trigonometría)

Lunes 8 de Mayo de 2023

P1. Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

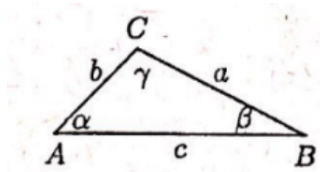
$$\frac{1}{\cot(\theta)+\cot^3(\theta)}+\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)+\operatorname{tg}^3(\theta)}+\sin(2\theta)=\sec(\theta)\operatorname{cosec}(\theta)$$

P2. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica:

$$2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cos(2x)-20\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

P3. Demuestre que en todo triángulo de lados a, b, c y ángulos α, β, γ se cumple:

$$b\cos(\gamma)-c\cos(\beta)=\frac{1}{a}(b^2-c^2)$$

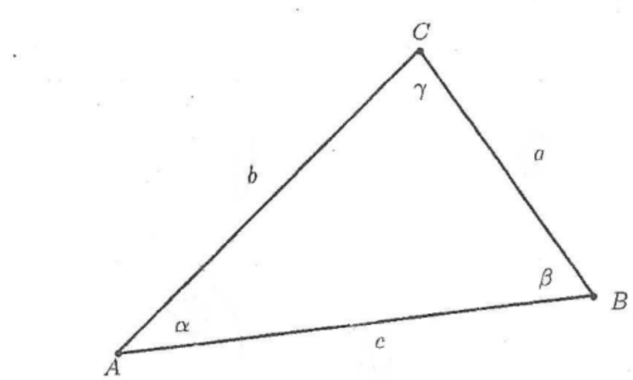


P4. Demuestre la siguiente propiedad.

$$\frac{1}{2}\cdot sin(x)\cdot sec^2(\frac{x}{2})+cos(x)\cdot tan(\frac{x}{2})-sin(x)=0$$

$$tan(4x)=\frac{4tan(x)-4tan^3(x)}{1-6tan^2(x)+tan^4(x)}$$

P5. Consideremos el triangulo ABC de ángulos respectivos.



si $\alpha = 2 \cdot \beta \Rightarrow a^2 = b \cdot (b + c)$

P6. Demuestre:
$sin(x) + sen(y) = 2 \cdot sin(\frac{x+y}{2}) \cdot cos(\frac{x-y}{2})$

P7. ***[Más de funciones]***
Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

P8. ***[Más para pensar]*** Para las constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$, con $A > B$, se definen las funciones reales f, gh en todo $x \in \mathbb{R}$ como se detalla a continuación:

$$f(x) = Acos^2(x) + Bsen^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$g(x) = Asen^2(x) + Bcos^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$h(x) = (A - B)sen(x)cos(x) + C(cos^2(x) - sen^2(x))$$

Se pide lo siguiente:

a) Pruebe que si $C = 0$, h alcanza su valor máximo para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) Demuestre que el conjunto de los ceros de h es $Ceros(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} tan(2x) = \frac{2C}{B-A} \right\}$.

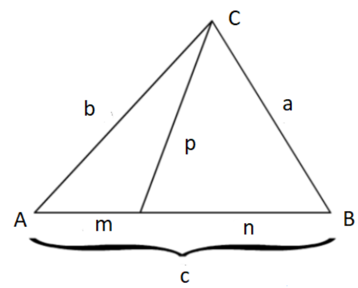
c) Estudie f y g

P9. ***[Teorema de Stewart]***

El teorema de Stewart permite determinar el valor de cualquier ceviana trazada desde uno de los vértices de un triángulo en función de los segmentos determinados por estos.
Demostrar que se cumple la siguiente ecuación:

$$c \cdot (mn + p^2) = a^2 m + b^2 n$$

Indicación: 0)Consideremos un triángulo ABC y un punto Q tal que pertenezca a la recta AB, en este caso CQ es una ceviana. En general se le dice ceviana al segmento que une un vértice con un punto de la recta opuesta a este.
1)Llame Q al punto intersección de la ceviana con la recta AB.
2)Defina un ángulo arbitrario y conveniente, tal que estos se relacionen directamente entre los triángulos formados y pruebe lo pedido.



P10. ***[CRMA1001-1-2011-2003][Ecuaciones Trigonométricas]***
Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica

$$a)\ \ cos^2(x) + cos^2(2x) + cos^2(3x) = \frac{3}{2}$$

b) Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2}cos(x) = a$$

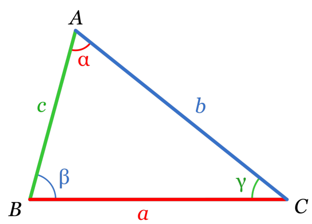
Hint: Le puede ser útil usar, sin necesidad de demostración.
$cos(\beta) + cos(\gamma) = 2cos(\dfrac{\beta+\gamma}{2})cos(\dfrac{\beta-\gamma}{2})$

P11. Resuelve

$$sen(2x) = cos(\frac{x}{2})$$

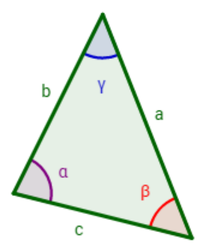
Resumen

- **Identidad Pitagórica**
  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- **Ceros de Funciones Trigonométricas**
  - $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
  - $\cos(x) = 0 \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
  - $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- **Ecuaciones Trigonométricas**
  - Si $|a| \leq 1$: $\sin(x) = a \iff x = k\pi + (-1)^k \arcsin(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \arcsin(a) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
  - Si $|a| \leq 1$: $\cos(x) = a \iff x = 2k\pi \pm \arccos(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \arccos(a) \in [0, \pi]$
  - $\tan(x) = a \iff x = k\pi + \arctan(a)$, con $k \in \mathbb{Z}, \arctan(a) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- **Teorema del Seno**



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

- **Teorema del Coseno**



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\gamma)$$

PAUTA AUXILIAR 8 (JAVIER)

JAVIER SANTIDRIÁN SALAS

P1 PDQ
$$\frac{1}{\cot(\theta)+\cot^3(\theta)}+\frac{1}{tg(\theta)+tg^3(\theta)}+\sin(2\theta)=\sec(\theta)\csc(\theta)$$

SOL: NOTAR QUE:

- $$\frac{1}{\cot(\theta)+\cot^3(\theta)}=\frac{1}{\cot(\theta)(1+\cot^2(\theta))}=\frac{1}{\cot(\theta)\csc^2(\theta)}$$

$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

$\Rightarrow 1+\cot^2(\theta)=\csc^2(\theta)$ $:\sin^2(\theta)$

$\left(\cot(\theta)=\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad \csc(\theta)=\frac{1}{\sin(\theta)}\right)$

$$=\frac{1}{\cot(\theta)}\frac{1}{\csc^2(\theta)}=tg(\theta)\sin^2(\theta)=\frac{\sin^3(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$tg(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

- $$\frac{1}{tg(\theta)+tg^3(\theta)}=\frac{1}{tg(\theta)(1+tg^2(\theta))}=\frac{1}{tg(\theta)\sec^2(\theta)}$$

$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

$\Rightarrow tg^2(\theta)+1=\sec^2(\theta)$ $:\cos^2(\theta)$

$\left(\sec(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)}\right)$

$$=\frac{1}{tg(\theta)}\frac{1}{\sec^2(\theta)}=\cot(\theta)\cos^2(\theta)=\frac{\cos^3(\theta)}{\sin(\theta)}$$

- $$\sin(2\theta)=\sin(\theta+\theta)=\sin(\theta)\cos(\theta)+\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$

$$=2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cot(\theta)+\cot^3(\theta)}+\frac{1}{tg(\theta)+tg^3(\theta)}+\sin(2\theta)$$

(SIEMPRE PARTIMOS DEL LADO DE LA = DONDE HAY MÁS INFO)

$$=\frac{\sin^3(\theta)}{\cos(\theta)}+\frac{\cos^3(\theta)}{\sin(\theta)}+2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$=\frac{\sin^4(\theta)+\cos^4(\theta)+2\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)}$$

$$=\frac{(\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta))^2}{\sin(\theta)\cos(\theta)}=\frac{1^2}{\sin(\theta)\cos(\theta)}$$

$$=\frac{1}{\sin(\theta)}\cdot\frac{1}{\cos(\theta)}=\csc(\theta)\sec(\theta) \quad \blacksquare$$

P2 RESUELVA LA ECUACIÓN:

$$2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cos(2x)-20\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

SOL:

$$2\cos^2(x)+2\cos^2(x)\cos(2x)-20\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

$$\iff 2\cos^2(x)\left(1+\cos(2x)\right)-5\cdot 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+1=0$$

$$\iff 2\cos^2(x)\left(1+\cos(x+x)\right)-5\cdot\Big[\underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\Big]^2+1=0$$

$$=\operatorname{sen}\left(2\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\operatorname{sen}(x)\cancelto{0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}-\cancelto{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos(x)$$

$$=-\cos(x)$$

$$\iff 2\cos^2(x)\left(1+\cos^2(x)-\operatorname{sen}^2(x)\right)-5\cos^2(x)+1=0$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\iff 2\cos^2(x)\cdot 2\cos^2(x)-5\cos^2(x)+1=0$$

$$\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$$

$$\iff 4\cos^4(x)-5\cos^2(x)+1=0$$

$$\iff 4u^2-5u+1=0$$ (CUADRÁTICA EN u)

$$u=\cos^2(x)$$

$$\iff u=\frac{5\pm\overbrace{\sqrt{25-16}}^{3}}{8}$$ (SOLUCIÓN CUADRÁTICA)

$$\iff \cos^2(x)=\frac{5\pm 3}{8}$$

$$\iff \cos^2(x)=\frac{5+3}{8}=1 \quad\vee\quad \cos^2(x)=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\underset{\sqrt{(\cdot)}}{\iff} |\cos(x)|=1 \quad\vee\quad |\cos(x)|=\frac{1}{2}$$

$$\iff \cos(x)=1 \quad\vee\quad \cos(x)=-1 \quad\vee\quad \cos(x)=\frac{1}{2} \quad\vee\quad \cos(x)=-\frac{1}{2}$$

$$\iff \underset{k\in\mathbb{Z}}{x=2k\pi\pm 0} \quad\vee\quad \underset{k\in\mathbb{Z}}{x=2k\pi\pm\pi} \quad\vee\quad \underset{k\in\mathbb{Z}}{x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}} \quad\vee\quad \underset{k\in\mathbb{Z}}{x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}}$$

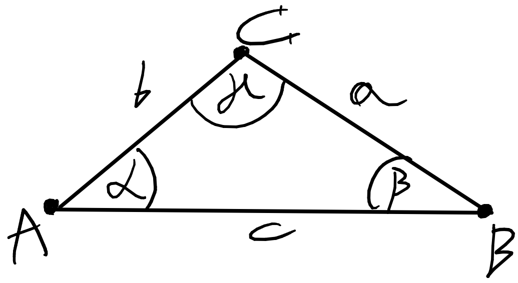
$$\cos(x)=a \iff \underset{k\in\mathbb{Z}}{x=2k\pi\pm\arccos(a)}$$

$$\iff x\in\{2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}\cup\{2k\pi\pm\pi:k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{2k\pi\pm\frac{\pi}{3}:k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

∎

P3 PDQ EN TODO $\triangle$ DE LADOS a, b, c Y ÁNGULOS α, β, γ SE CUMPLE:

$$b\cos(\gamma) - c\cos(\beta) = \frac{1}{a}(b^2 - c^2)$$



SOL: COMO NOS PIDEN ALGO CON COSENO DE γ Y DE β, USAREMOS TEOREMA DEL COSENO:

i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ → COSENO DEL $\measuredangle$ OPUESTO AL LADO a

ii) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ → $\measuredangle$ OPUESTO A b

iii) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ → $\measuredangle$ OPUESTO A c

DE ii) $\Rightarrow \cos(\beta) = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

DE iii) $\Rightarrow \cos(\gamma) = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

LUEGO:

$$b\cos(\gamma) - c\cos(\beta)$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$= \frac{\cancel{a^2} + b^2 - c^2 - \cancel{a^2} - c^2 + b^2}{2a}$$

$$= \frac{2b^2 - 2c^2}{2a} = \frac{\cancel{2}(b^2 - c^2)}{\cancel{2}a} = \frac{1}{a}(b^2 - c^2) \quad ////$$

Maratón Cálculo C_3

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Que les vaya bonito!!

Regalo de estudio Álgebra.

Sea E un conjunto no vacío. Sea P una relación refleja y transitiva sobre E. Se define una nueva relación R sobre E dada por:

$$a R b \iff a P b \wedge b P a$$

a) Pruebe que R es relación de equivalencia

b) Pruebe que si $a' \in [a]_R$ y $b' \in [b]_R$ entonces

$$a P b \iff a' P b'$$

c) Se define la relación Ω sobre E/R como

$$[a]_R \, \Omega \, [b]_R \iff a P b$$

Pruebe que Ω es relación de orden sobre E/R.

Estudiamos relaciones.

tienen su café listo?

1. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $[0, 2\pi)$

(a) $2\cos(x) + 1 = 0$

(b) $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2x) - 1 = 0$

(c) $\mathrm{sen}^2(x) + 2\cos(x) = -2$

(d) $2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0$

(e) $\cos(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(f) $6\,\mathrm{sen}(2x) + 9\,\mathrm{sen}(x) = 0$

(g) $\cos(6x) - \cos(3x) = 0$

(h) $\cos(2x) = \mathrm{sen}(x)$

(i) $\mathrm{sen}(2x) = 4\,\mathrm{sen}(x)$

(j) $3\tan^2(x) - 2 = 5\sec^2(x) - 9$

(k) $3\cos^2(x) - 6\cos(x) = \mathrm{sen}^2(x) - 3$

(l) $3\tan^2(x) - 2\sqrt{3}\tan(x) = 3$

(m) $\sqrt{3}\cos(x) - \mathrm{sen}(x) = -2$

(n) $\mathrm{sen}(5x) - \cos(5x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Despejar una ecuación trigonométrica

$\mathrm{Sen}(x) = a$

$$\boxed{x = k\pi + (-1)^k \arcsin(a), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$\cos(x) = a$

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \arccos(a), \quad k \in \mathbb{Z}}$$

El coseno es función PAR

Lo que busco en esto es despejar x.

$$\sqrt{2}\,\text{sen}(2x) - 1 = 0$$

1) Dejar todo como una función trigo

2) Tirar todo a un lado

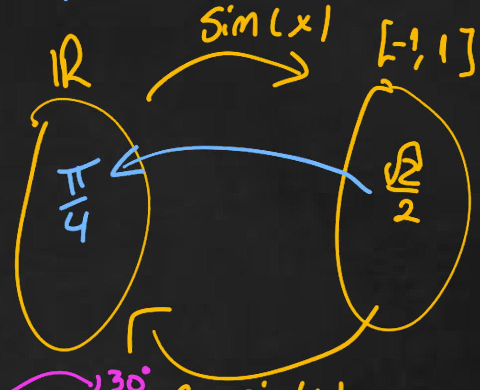
$$\text{sen}(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

z

$$\text{sen}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2\,\text{sen}(x)\cos(x)$ no hago esto pues lo complica más



$$z = k\pi + (-1)^k \underbrace{\text{arc sin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

No puedes dejarlo en función de arc sin / arc cos

$\text{arc sin}(x)$

$30°$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sen	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

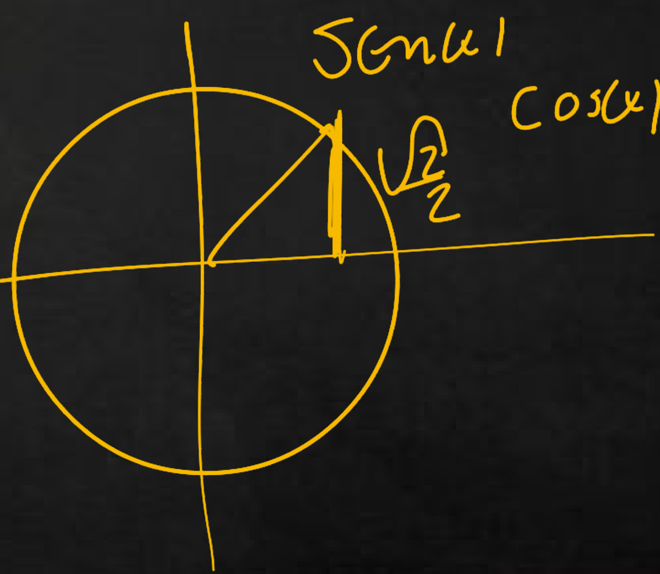
Fórmula Apunte

$$\boxed{\text{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$5k$

$\frac{x}{2}$

$\frac{3x}{2}$



$$\operatorname{sen}(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad X \qquad 2\cos(x)\operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , z = 2x$$

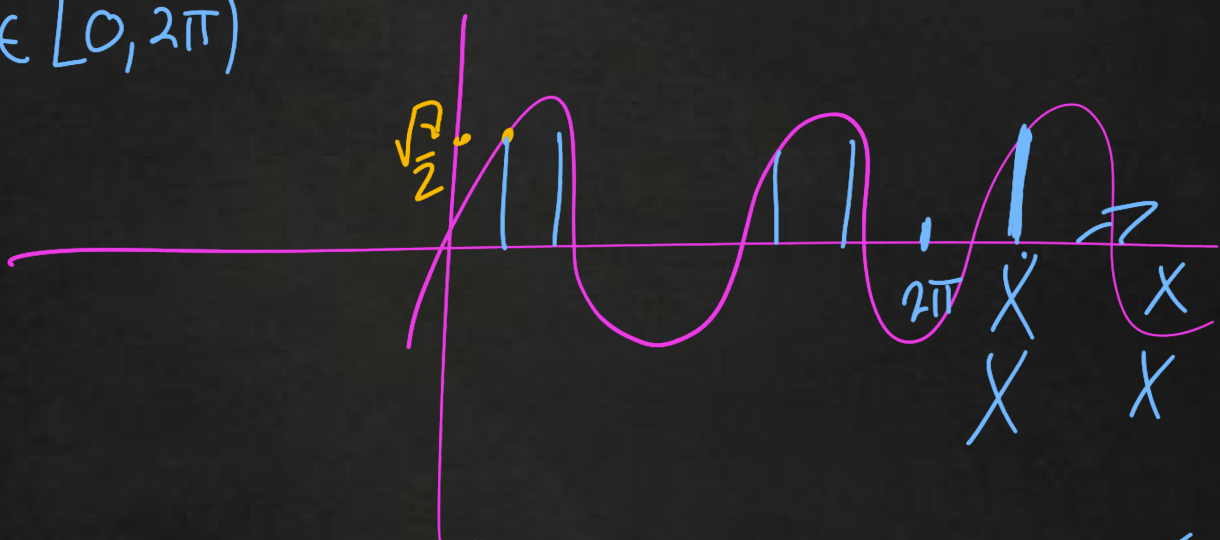
$$z = k\pi + (-1)^k \underbrace{\arcsin\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$z = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{8} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, 2\pi)$$



1) $k=0$, $x = +(-1)^0 \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

2) $k=1$, $x = \frac{1\cdot\pi\cdot 4}{2\cdot 4} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

3) $k=2$, $x = \frac{2\pi}{2} + (-1)^2 \frac{\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{9\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

4) $k=3$, $x = \frac{3\pi}{2} + (-1)^3 \frac{\pi}{8} = \frac{4\cdot 3\pi}{4\cdot 2} - \frac{\pi}{8} = \frac{11\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

5) $K=4 \quad X = \frac{\cancel{4}\pi}{2} + (-1)^4 \frac{\pi}{8} = 2\pi + \frac{\pi}{8} \notin [0,2\pi)$ X

6) $k=5 \quad X = \frac{5\pi}{2} + (-1)^5 \frac{\pi}{8} = \frac{4\cdot 5\pi}{4\cdot 2} - \frac{\pi}{8} = \frac{19}{8}\pi \notin [0,2\pi)$

$\boxed{\forall k \geq 4}$, la solución $\notin [0,2\pi)$

$K=-1, \ X = -\frac{\pi}{2} + (-1)^{-1}\frac{\pi}{8} = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} < 0 \notin [0,2\pi)$ X

$k=-2, \ X = -\frac{2\pi}{2} + (-1)^2 \frac{\pi}{8} = -\pi + \frac{\pi}{8} \notin [0,2\pi)$ X

$\boxed{\forall k \leq -1}$ no sirve solución.

$\therefore$ solución $\boxed{x = \frac{\pi}{8}, \ x = \frac{3\pi}{8}, \ x = \frac{9\pi}{8}, \ x = \frac{11\pi}{8}}$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Pc 1)

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 0 \ / \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$\operatorname{Sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) =$

$$\operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\Big(\underbrace{x + \frac{\pi}{4}}_{z}\Big) = 0}$$

Fórmula aparte

$$\operatorname{sen}(z)=0$$

$$z = k\pi + (-1)^k \underbrace{\arcsin(0)}_{\to 0}$$

$$z = k\pi + \cancel{(-1)^k} \cdot 0$$

$$z = k\pi$$

$$\boxed{z = x + \frac{\pi}{4}}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = k\pi$$

$$\boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{4}}$$

los valore se k

$k=0$

$$x = -\frac{\pi}{4} \quad x \notin [0, 2\pi)$$

$k=1$

$$x = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi) \quad \checkmark$$

$k=2$

$$x = \frac{42\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0, 2\pi) \quad \checkmark$$

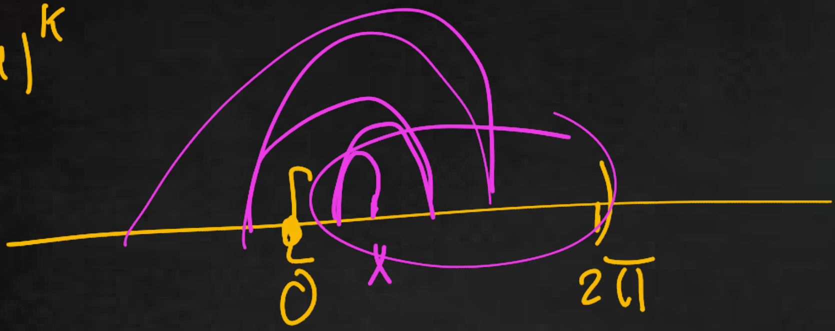
$k \geq 3$

$$x = 3\pi - \frac{\pi}{4} \notin [0, 2\pi) \quad \times$$

$K \leq -1$

$X = -\pi - \frac{\pi}{4} \quad X \notin [0, 2\pi]$

$(-1)^K$



$$\boxed{X = \frac{3\pi}{4}, \quad X = \frac{f\pi}{4}}$$

$P_{\epsilon}2$

$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1, \quad x \in [0, 2\pi)$

c) $\underbrace{\operatorname{sen}^2(x)}_{1-\cos^2(x)} + 2\cos(x) = -2$

$1 - \cos^2(x) + 2\cos(x) = -2$

1) 1 función

$$\boxed{s^2 + c^2 = 1}$$

$s^2 = 1 - c^2$

$$\boxed{0 = \cos^2(x) - 2\cos(x) - 3}$$

$$\boxed{u = \cos(x)}$$

$0 = u^2 - 2u - 3$

$0 = (u-3)(u+1)$

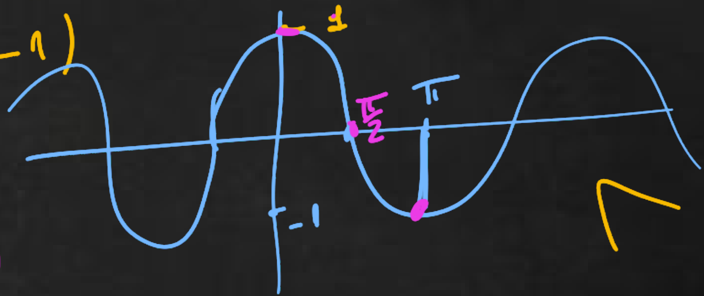
$0 = (\cos(x) - 3)(\cos(x) + 1)$

Caso 1 $\quad \cos(x) - 3 = 0 \iff \cos(x) = 3$ ✗ $, \quad \cos(x) \in [-1, 1]$

Caso 2 $\quad \cos(x) + 1 = 0$

$\boxed{\cos(x) = -1}$ fórmula apunte 123

$x = 2k\pi \pm \arccos(-1)$



$\arccos(-1) = \pi$

$x = 2k\pi \pm \pi \quad , x \in [0, 2\pi)$

$\forall\, k \leq -1$ ✗

$x = -2\pi \pm \pi$

$\to -\pi$ ✗ $\notin [0, 2\pi)$

$\to -3\pi$ ✗ $\notin [0, 2\pi)$

$k = 0$

$x = \pm\pi$

$\to \pi$ ✓ $\in [0, 2\pi)$

$\to -\pi$ ✗ $\notin [0, 2\pi)$

$k = 1$

$x = 2\pi \pm \pi$

$\to 3\pi$ ✗ $\notin [0, 2\pi)$

$\to \pi$ ✓ $\in [0, 2\pi)$

$k \geq 2$

$x = 4\pi \pm \pi$ ✗

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\boxed{x = \pi}$

e) $\cos(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\underbrace{\cos(3x)}_{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad / \quad 3x = 2x + x$ X

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
S	0	1	2	3	4
C	4	3	2	1	0

2

$\cos(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

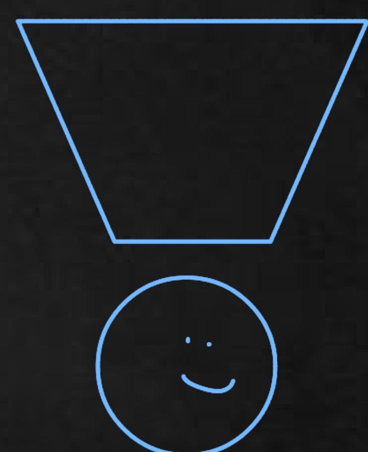
$z = 2k\pi \pm \underbrace{\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{\frac{\pi}{4}}$

$x \in [0, 2\pi)$

$3x = z = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad / \cdot \frac{1}{3}$

$$\boxed{x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}}$$

$k \in \mathbb{Z}$



$k = 0$

$x = \pm \frac{\pi}{12}$

$\frac{\pi}{12}$ ✓ $\in [0, 2\pi)$

$-\frac{\pi}{12}$ X $\notin [0, 2\pi)$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$K=1$

$$x = \frac{4}{4}\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12} \quad \begin{cases} \dfrac{9\pi}{12} & ✓ \\[2ex] \dfrac{7\pi}{12} & ✓ \end{cases} \in [0, 2\pi)$$

$K=2$

$$x = \frac{4}{4}\cdot\frac{4\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12} \quad \begin{cases} \dfrac{17\pi}{12} \in [0, 2\pi) & ✓ \\[2ex] \dfrac{15\pi}{12} \in [0, 2\pi) & ✓ \end{cases}$$

$K=3$

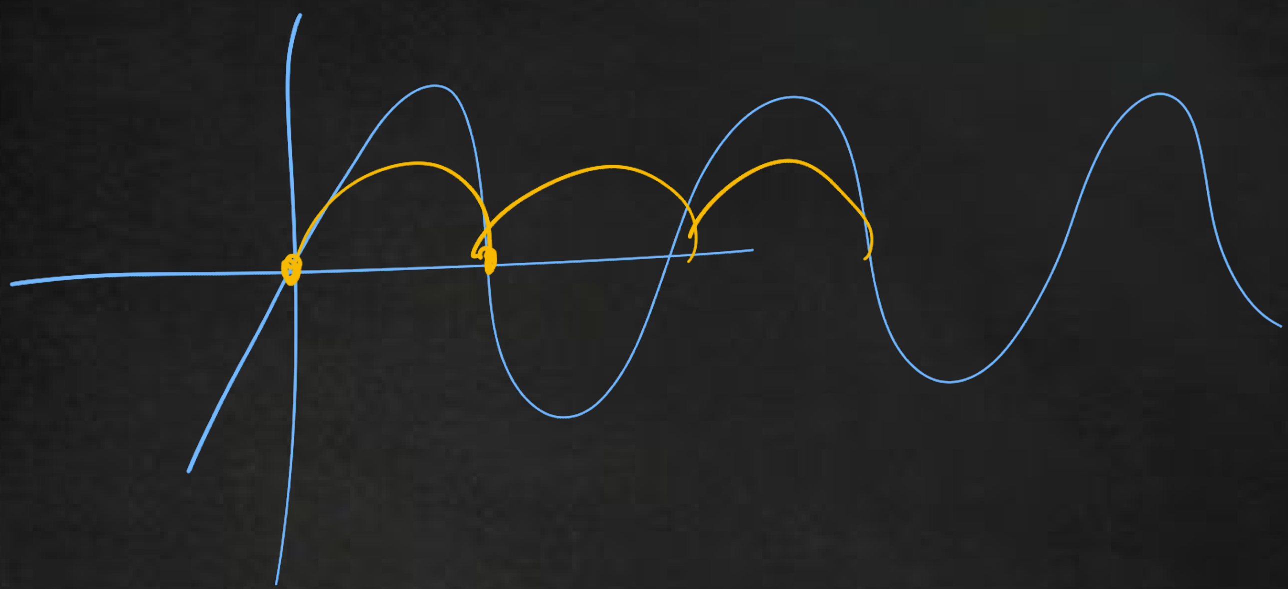
$$x = 2\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad \begin{cases} 2\pi + \dfrac{\pi}{12} \ \times \ \notin [0, 2\pi) & \times \\[2ex] 2\pi - \dfrac{\pi}{12} \in [0, 2\pi) & ✓ \end{cases}$$

$K \geq 4$ no sirve

$K=-1$

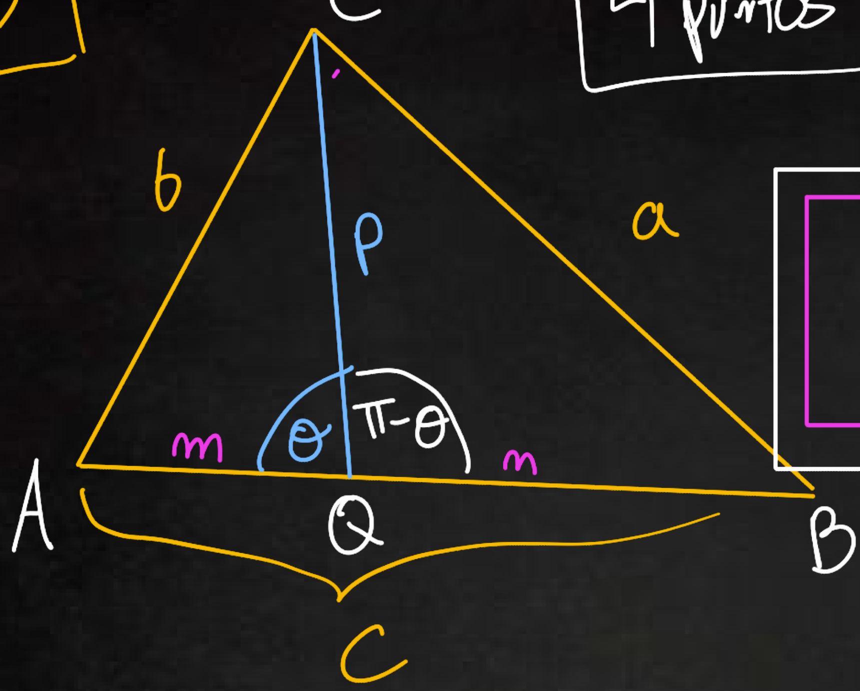
$$x = \frac{4}{4}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \pm \frac{\pi}{12} \quad \begin{cases} -\dfrac{7\pi}{12} & \times \\[2ex] -\dfrac{9\pi}{12} & \times \end{cases}$$

$\forall k \leq -1 \quad \times$



$$\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

P1 | 4 puntos

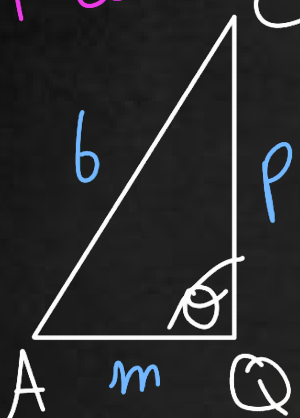


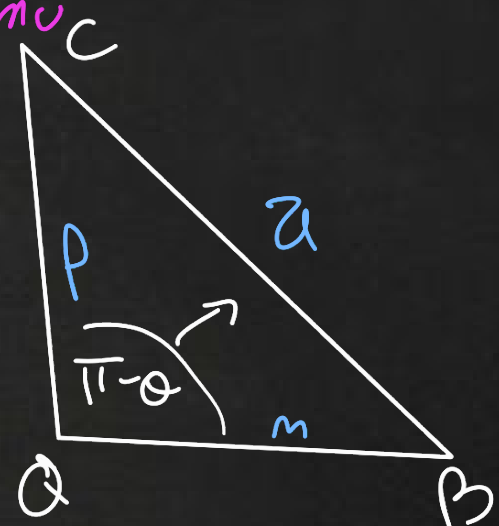
PDQ

$$\boxed{c(mn+p^2)=a^2m+b^2n}$$

$m+n=c$

T seno y T. coseno





ΔAQC

T. Coseno

$$\underbrace{b^2=m^2+p^2-2mp\cos(\theta)}_{①}$$

$\cos(\theta)$

ΔQBC

T. Coseno

$$\underbrace{a^2=n^2+p^2-2np\cos(\pi-\theta)}_{②}$$

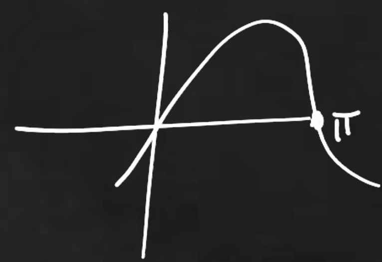
$\cos(\theta)$

$=$

① $b^2 = m^2 + p^2 - 2mp\cos(\theta)$

$2mp\cos(\theta) = m^2+p^2-b^2$

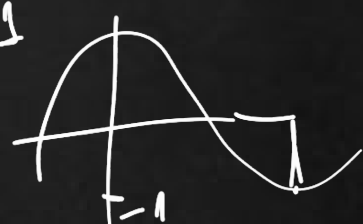
$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{m^2+p^2-b^2}{2mp}}$$



② $a^2 = p^2 + m^2 - 2m\cdot p\cos(\pi-\theta)$

$$\cos(\underbrace{\pi+(-\theta)}_{\alpha+\beta}) = \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}\cos(-\theta) - \underbrace{\cancel{\sin(\pi)}}_{0}\sin(-\theta)$$

PAR
$\cos(X) = \cos(-X)$



$\cos(\pi+(-\theta)) = -\cos(-\theta)$
$= -\cos(\theta)$

$a^2 = p^2 + m^2 - 2m\cdot p(-\cos(\theta))$

$a^2 = p^2 + m^2 + 2mp\cos(\theta)$

② $\boxed{\dfrac{a^2-p^2-m^2}{2mp} = \cos(\theta)}$ $\boxed{\cos(\theta) = \dfrac{m^2+p^2-b^2}{2mp}}$ ①

$$\Rightarrow \frac{a^2-p^2-m^2}{\cancel{2}m\cancel{p}} = \frac{m^2+p^2-b^2}{\cancel{2}m\cancel{p}}$$

$p \neq 0$
pues es un lado

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$a^2 m - p^2 m - n^2 m = m^2 n + p^2 n - b^2 n$$

$$a^2 m + b^2 n = m^2 n + n^2 m + p^2 m + p^2 n$$

$$a^2 m + b^2 n = mn[m+n] + p^2[m+n],$$

$$a^2 m + b^2 n = \underbrace{(m+n)}_{c}(mn+p^2)$$

$$\boxed{a^2 m + b^2 n = c(mn+p^2)}$$

Teorema steward

P1) $\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{4}\right) = 0$$

$$\vdots \quad (\cos)(\operatorname{sen}) = 0$$

Resta $\longrightarrow$ Producto $= 0$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}(x) \pm \operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$$

Importantes

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

PDQ)

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) =$$

$$= \cos\left(\underbrace{\frac{x+x}{2} + \underbrace{\frac{y-y}{2}}_{0}}_{=x}\right) - \cos\left(\underbrace{\frac{x-x}{2}}_{0} + \frac{y+y}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right)$$

$$= \cancel{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$-\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \cos(x) - \cos(y)$$

Pr

$$\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

→ llevarla a 1 sola funcion $= 0$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}$$

$$\cos(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} - 2x}_{\alpha}) = \cos(\underbrace{\tfrac{x}{2}}_{\beta})$$

$$\boxed{\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Resta → Producto

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

Resta = producto $= 0$

$$\cancel{-2}\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{2}x + \frac{x}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{2}x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-3x}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-5x}{4}\right)=0$$

fcfm
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-3x}{4}\right)=0$ 2) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-5x}{4}\right)=0$

$$\operatorname{sen}\Big(\underbrace{\frac{\pi-3x}{4}}_{z}\Big)=0$$

$$z = k\pi + (-1)^k \cancel{\arcsin(0)} \to 0$$

$$\frac{\pi-3x}{4} = k\pi$$

$$\pi - 3x = 4k\pi$$

$$\pi - 4k\pi = 3x$$

$$\boxed{\frac{\pi-4k\pi}{3} = x}$$

2) $$\operatorname{sen}\Big(\underbrace{\frac{\pi-5x}{4}}_{z}\Big)=0$$

$$z = k\pi + (-1)^k \cancel{\arcsin(0)} \to 0$$

$$z = k\pi$$

$$\frac{\pi - 5x}{4} = k\pi$$

$$\boxed{x = \frac{\pi - 4k\pi}{5}}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

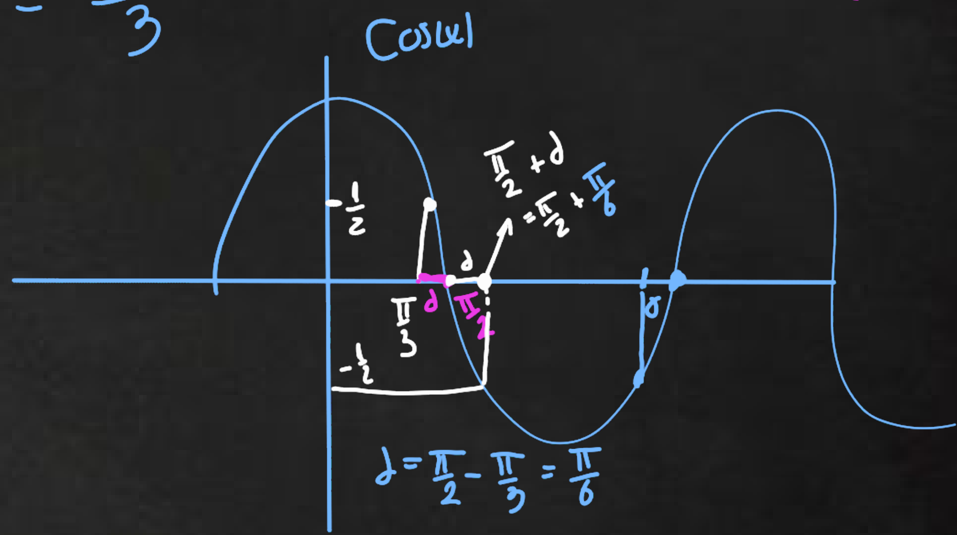
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$\sqrt{\ }$ / 2

$$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

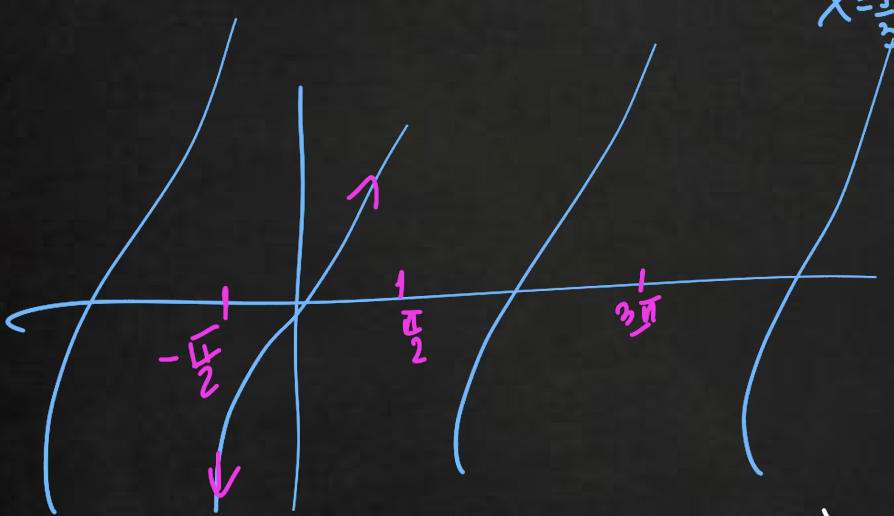
$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

cos(x)



$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{3\pi}{3\,2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$



$$tg(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x) \neq 0}$$

$$\arctan g(\sqrt{3}) = \arctan g\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\frac{\pi}{3}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	1	2	3	4
cos	4	3	2	1	0

$\sqrt{\ }$ / 2

$$tg(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$x = \frac{\pi - 4k}{3}$, $x = \frac{\pi - 4k}{5}$

$\frac{3\pi}{5}$ Es solución?

$k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi - 4k}{3} \quad \times \\ 2)\ \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi - 4k}{5} \end{array}}$$

Ocupemos 2) pues tiene 5

$$\frac{3\pi}{\cancel{5}} = \frac{\pi - 4k\pi}{\cancel{5}}$$

$$3\pi = \pi - 4k\pi$$

$$\cancel{2}\cancel{\pi} = -\cancel{4}k\cancel{\pi}$$

$$-\frac{1}{2} = k \quad \times \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\frac{3\pi}{5}$ no es solución

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Ecuación trigonométrica

Resolvemos

$$\boxed{1 = \cos(0) = \cos(0\cdot x)}$$

$$1+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$$

$$\cos(0\cdot x)+\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)=0$$

$$\underbrace{\cos(0\cdot x)+\cos(2x)}+\cos(x)+\cos(3x)=0$$

$$2\cos\left(\frac{0\cdot x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{0\cdot x-2x}{2}\right)+2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=0$$

$\cos(x)=\cos(-x)$ PAR

$$\cancel{2}\cos(x)\underbrace{\cos(-x)}_{\cos(x)}+\cancel{2}\cos(2x)\underbrace{\cos(-x)}_{\cos(x)}=0$$

$$\cos^2(x)+\cos(2x)\cos(x)=0$$

$$\cos(x)\left[\underbrace{\cos(x)+\cos(2x)}\right]=0$$

$$\cos(x)\left[\cancel{2}\cos\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right)\right]=0 \quad \Big/\ \frac{1}{2}$$

$$\cos(x)\left[\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right)\right]=0$$

$\downarrow$ par

$$\cos(x)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

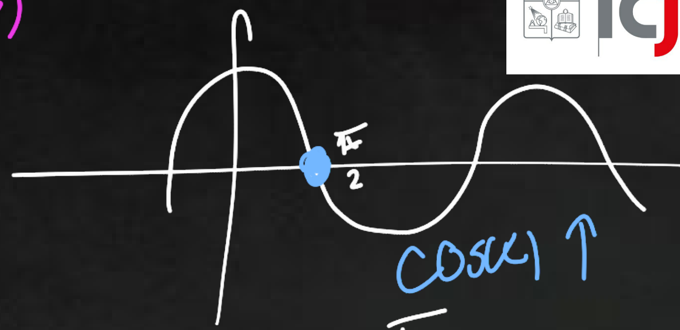
1) $\cos(x)=0$ 2) $\cos\left(\frac{3}{2}x\right)=0$ 3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=0$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

1) $\cos(x) = 0$

$x = 2k\pi \pm \underbrace{\arccos(0)}_{\frac{\pi}{2}}$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$



$\cos(x)$ ↑

2) $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$

$\frac{3x}{2} = 2k\pi \pm \underbrace{\arccos(0)}_{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{3x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{4k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3}$ //

3) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \underbrace{\arccos(0)}_{\frac{\pi}{2}}$

$\frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

$x = 4k\pi \pm \pi$

arccos al, pregunto que cos(x) me da a

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{3}\cos(x) + \text{sen}(x) = 1 \,/\, \frac{1}{2}$

$$\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\text{sen}(\frac{\pi}{3})}\cos(x) + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos(\frac{\pi}{3})}\text{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} \neq 0$$

a) Dom, ceros, signos, periodicidad, inyectividad
Paridad

$$1-\cos(x) \neq 0 \qquad \cos(x) \neq 1$$

$$\cos(x) = 1$$

$$x = 2k\pi \pm \cancel{\arccos(1)} \quad 0$$

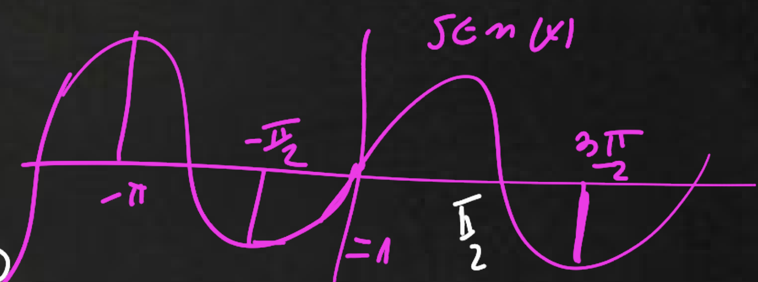
$$x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ x \ / \ x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$$

Forma Propiedad

Ceros, $x \in \operatorname{Dom}(f)$, $f(x) = 0$

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)} = 0$$



$$\Leftrightarrow \quad 1+\operatorname{sen}(x) = 0$$

$$\operatorname{sen}(x) = -1$$

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin(-1)$$

$$x = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2}$$

$$x = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}, \ x \in \operatorname{Dom}(f)$$

Signos | $f(x) \geq 0$

≤ 0

$$f(x) = \frac{1 + sen(x)}{1 - cos(x)}$$

1) $-1 \leq sen(x) \leq 1 \quad / +1$

$-1+1 \leq 1 + sen(x) \leq 1+1$

$0 \leq 1 + sen(x) \leq 2$

$-1 < cos(x) \leq 1 \quad / -1$

$-1 < -cos(x) \leq 1 \quad / +1$

$-1+1 < 1 - cos(x) \leq 1+1$

$0 < 1 - cos(x) \leq 2$

$$f(x) = \frac{1 + sen(x)}{1 - cos(x)} \begin{matrix}(+)\\(+)\end{matrix} = f(x) \geq 0, \ \forall x \in Dom(f)$$

Paridad | $f(x)$ PAR $f(x) = f(-x)$

$\boxed{-sen(-x) = sen(x)}$

Impar

$sen(-x) = -sen(x)$ $/ \cdot -$

$$f(x) = \frac{1 + sen(x)}{1 - cos(x)} \overset{?}{=} \frac{1 + sen(-x)}{1 - cos(-x)}$$

$$\neq \frac{1 - sen(x)}{1 - cos(x)}$$

$\therefore$ No PAR

Impar $f(x) = -f(-x)$

$$= -\left(\frac{1 - sen(x)}{1 - cos(x)}\right) \neq f(x) \ \therefore \text{No Impar}$$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Periodo pág 88.

$f(x+p) = f(x), \ \forall x \in Dom(f)$

$p \neq 0$

88

Para ver periodo uno asume

$f(x+p) = f(x)$ y despeja $\underline{p}$, ojo $\forall x \in Dom$

Hipótesis

$p = 0$

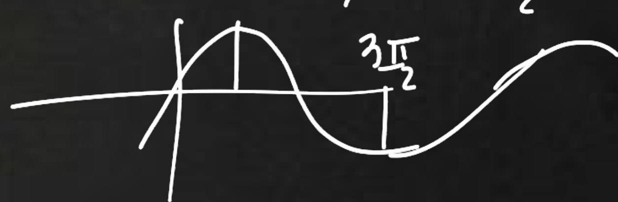
$p > 0$ ✓

$$\frac{1+sen(x+p)}{1-cos(x+p)} = \frac{1+sen(x)}{1-cos(x)}$$

$$\frac{1+sen\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)}{1-cos\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)} = \frac{1+sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{-1}}{1-cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

$\forall x \in Dom$

$x = \frac{3\pi}{2}$



$$\frac{1+sen\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)}{1-cos\left(\frac{3\pi}{2}+p\right)} = 0$$

$$1+sen\left(\frac{3\pi}{2}+p\right) = 0$$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+p\right) = -1$$

$\downarrow$

$$\frac{3\pi}{2} + p = k\pi + (-1)^k \underbrace{\arcsin(-1)}_{\frac{3\pi}{2}}$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{3\pi}{2} + p = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2} \quad , \quad k = 0$$

$$\frac{3\pi}{2} + p = \frac{3\pi}{2}$$

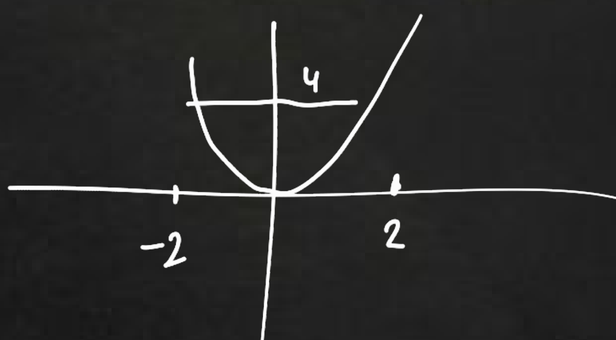
$$\boxed{p = 0}$$

$p \neq 0$

$\therefore$ no tengo periodo

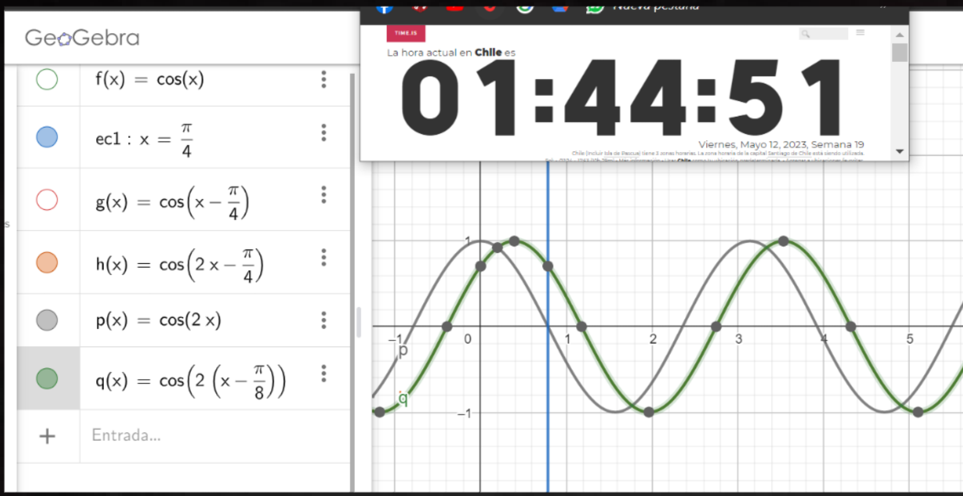
Inyectiva. $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

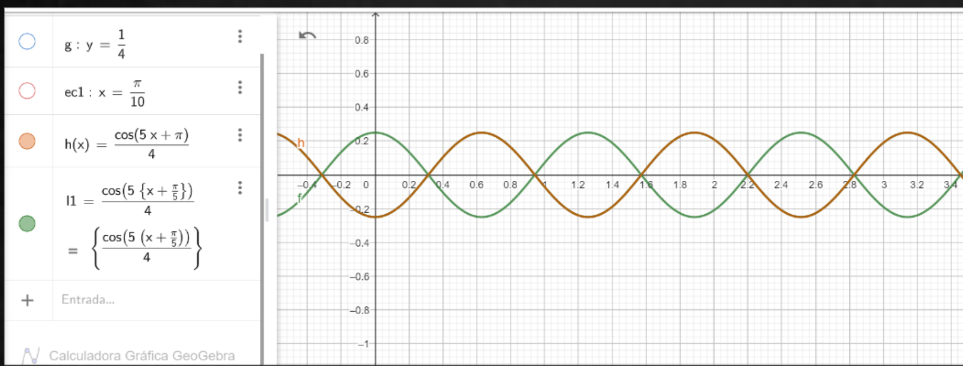
$$\frac{1 + \sin(x)}{1 - \cos(x)} = \frac{1 + \sin(y)}{1 - \cos(y)} \Rightarrow x = y$$

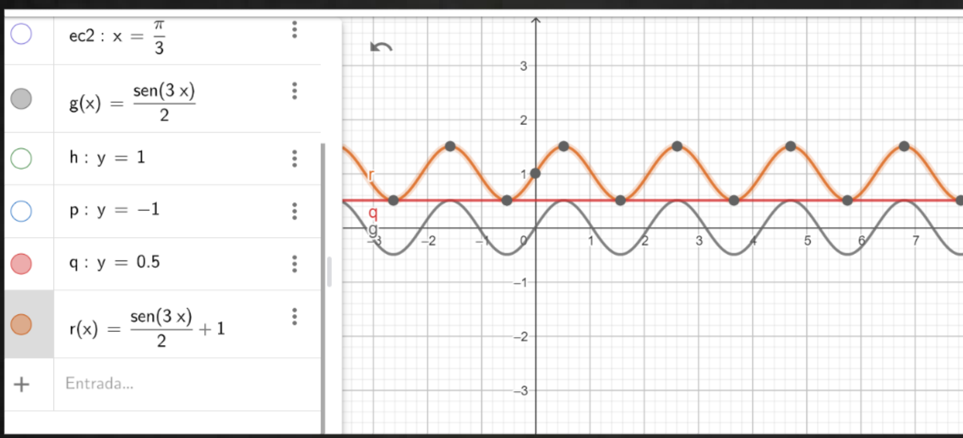


$$x = \frac{3\pi}{2} \neq y = \frac{7\pi}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 = f(y) \quad \therefore \text{No inyectiva}$$


GeoGebra
f(x) = cos(x)
ecl : x = π/4
g(x) = cos(x − π/4)
h(x) = cos(2x − π/4)
p(x) = cos(2x)
q(x) = cos(2(x − π/8))
Entrada...
La hora actual en Chile es
01:44:51
Viernes, Mayo 12, 2023, Semana 19


g : y = 1/4
ecl : x = π/10
h(x) = cos(5x + π)/4
l1 = cos(5(x + π/5))/4
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra


ec2 : x = π/3
g(x) = sen(3x)/2
h : y = 1
p : y = −1
q : y = 0.5
r(x) = sen(3x)/2 + 1
Entrada...

b2 Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

b.2 $\sqrt{2}\cos(x) = a \Rightarrow \cos(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Sabemos $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

Luego los únicos enteros entre estas cotas son $\{-1, 0, 1\}$, habrá que ver por casos.

a b c

a) $a = -1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2k\pi \pm \arccos\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right), & k \in \mathbb{Z} \\ &= 2k\pi \pm \tfrac{3\pi}{4} & k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (1)$$

b) $a = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{k}\pi \pm \arccos(0), & \bar{k} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{k}\pi \pm \tfrac{\pi}{2} & \bar{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (2)$$

c) $a = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{\bar{k}}\pi \pm \arccos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) & \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{k}\pi \pm \pi/4 & \bar{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } (3)$$

Uniendo soluciones se tiene.

Scanned with CamScanner

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
01 de Mayo del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 7

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico y determinar si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

Solución

Primero recordemos que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\frac{x}{2} = 0.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\cos x - \cos y$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\cos x - \cos y &= \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\\ &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Donde la última expresión, se obtiene después de aplicar las fórmulas ya conocidas para calcular el coseno de sumas y restas de ángulos, según corresponda.
Con esto, volvemos al problema, y reescribimos:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right)}_{(1)}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right)}_{(2)} = 0.\end{aligned}$$

Lo que vale si y sólo si $(1) = 0 \vee (2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones por separado tenemos

$$\begin{aligned}(1) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 3x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{3}.\end{aligned}$$

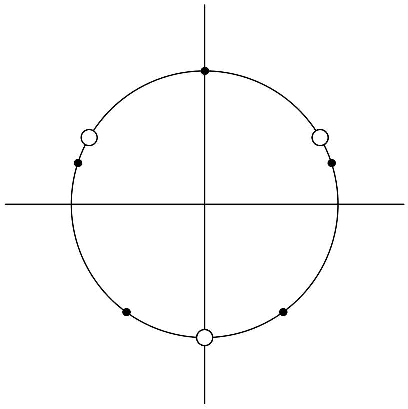
y para (2)

$$\begin{aligned}(2) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 5x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{5}.\end{aligned}$$

Para ver si $\frac{3\pi}{5}$ es solución, debemos encontrar, en las soluciones de (2), un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} \equiv_{4\pi} \frac{3\pi}{5}$. Esto equivale a encontrar $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi$. Esto pues la función $\operatorname{sen} 2x - \cos\frac{x}{2}$ es 4π-periódica. Resolvamos

$$\begin{aligned}
\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi &\Leftrightarrow 3 - 1 + 4k = 20\ell \\
&\Leftrightarrow 2 + 4k = 20\ell \\
&\Leftrightarrow 1 + 2k = 10\ell
\end{aligned}$$

Lo que es imposible. Concluimos que $\frac{3\pi}{5}$ no es solución.
Para graficar las soluciones, notemos que como la función es 4π-periódica, entonces en el circulo unitario veremos aparentemente soluciones que no lo son, por ejemplo $\frac{3\pi}{5}$, pues $\frac{3\pi}{5} \equiv_{2\pi} \frac{-7\pi}{5}$ y sabemos que $\frac{-7\pi}{5}$ es solución. Entonces lo que haremos será hacer el cambio $x = 2\alpha$ (para obtener una función 2π-periódica y graficaremos para α.



P2. **(a)** Demostrar que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.
Solución
Primero notemos que, sumando un cero adecuado, tenemos

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Entonces

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] + \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Recordemos ahora que $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cancel{- \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\
&+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cancel{+ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).
\end{aligned}$$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.
Solución

Notemos que $\cos 0 = 1$, entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 1 + \overbrace{\cos 3x + \cos x}^{(a)} = 0 &\Leftrightarrow \overbrace{\cos x + \cos 0}^{(a)} + 2\cos 2x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x + \cancel{2}\cos 2x \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos x(\overbrace{\cos 2x + \cos x}^{(a)}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\underbrace{\cos x}_{(1)} \underbrace{\cos \frac{3x}{2}}_{(2)} \underbrace{\cos \frac{x}{2}}_{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones para x: $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0$. Resolviendo por separado:

- (1)=0:
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$
- (2)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{3x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}.
\end{aligned}$$
- (3)=0:
$$\begin{aligned}
\cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \\
&\Leftrightarrow x = 4k\pi.
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

P3. Resolver la ecuación
$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$$

Solución
Un camino posible para solucionar el problema, es aplicar un método visto en cátedra, haciendo el cambio de variables $a = \cos x$, $b = \operatorname{sen} x$, y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a\sqrt{3} + b &= 1 \\
a^2 + b^2 &= 1
\end{aligned}$$

Donde la última expresión, nace del hecho de que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es un punto perteneciente a la circunferencia unitaria. A continuación, mostraremos otra solución, un poco más "'elegante"', notando que si multiplicamos la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos que

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Recordemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \overbrace{\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\
&\Leftrightarrow x = \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

P.

PDQ.

$$\frac{1}{2}\sin(x)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)\,tg\left(\frac{x}{2}\right)-\sin(x)=0$$

$$\frac{1}{2}\sin(x)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\cos(x)\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}-\sin(x)=\cancel{0}$$

$x=2\alpha.$

$$\frac{1}{2}\sin(2\alpha)\frac{1}{\cos^2(\alpha)}+\cos(2\alpha)\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$=\operatorname{sen}\alpha\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\cos^{\cancel{2}}(\alpha)}+\left(\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\right)\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}-\sin(2\alpha)$$

$$=tg\,\alpha\left(1+\cos^2\alpha-\sin^2(\alpha)\right)-\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$=tg\,\alpha\left(\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}+\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha)-\cancel{\operatorname{sen}^2(\alpha)}\right)-\operatorname{sen}(2\alpha)$$

$$=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}2\alpha$$

$$=\operatorname{sen}(2\alpha)-\sin(2\alpha)$$

Scanned with CamScanner

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ def

$f(x) = (1 + \text{sen}(x))/(1 - \cos(x))$ 1) Dom, ceros, signos, periodicidad, inyectividad

$-\frac{\pi}{2}$ $\pi + \frac{\pi}{2}$ 2π

Dom $1 - \cos(x) \neq 0$

$1 \neq \cos(x)$

$x = 2k\pi \pm 0 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

1) $\Rightarrow$ Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{x / x = 2k\pi, k \in \mathbb{N}\}$

2) Ceros $Z(f)$: $1 + \text{sen}(x) = 0$

$\text{sen}(x) = -1$

$\Rightarrow x = k\pi + (-1)^k \frac{3}{2}\pi$; $\pi + -\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow Z(f) = \{x / x = k\pi + (-1)^k \frac{3}{2}\pi, k \in \mathbb{N}\}$

3) signos $\to$ $f(x) = \frac{1 + \text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$

$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$

$0 \leq \text{sen}(x) + 1 \leq 2$

$\cos(x) \leq 1 \wedge -1 \leq \cos(x)$

$-1 \leq -\cos(x) \wedge -\cos(x) \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -\cos(x) \leq 1$

$0 \leq 1 - \cos(x) \leq 2$

$1 + \text{sin}(x) \geq 0$ $\forall x \in$ Dom

$1 - \cos(x) \geq 0$ $\forall x \in$ Dom

$\Rightarrow f(x) \geq 0$ $\forall x \in \text{Dom}(f(x))$

4) Paridad Dado $x = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow f(x) = 0$

$x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(x) \neq 0$ / $\nexists x \in \text{Dom}$ $f(x) < 0$

$$\frac{1 + \text{sen}(x)}{1 - \cos(x)} \neq \frac{1 + -\text{sin}(x)}{1 - \cos(x)} \neq \frac{-1 + \text{sin}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Scanned with CamScanner

Periodo

Debe ser al menos 2π periódica, cociente 2π periódica.

Periodo $f(x+p) = f(x)$, $\forall$ menor $p \in \mathbb{R}$

Por contradicción

si $p \in (0, 2\pi)$

$f(x) = f(x+p)$, $x = \frac{3\pi}{2}$

$$0 = \frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)} \Rightarrow -1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} + p = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2}$$

$\forall k$, si $k=0$ $\quad p = k\pi + (-1)^k \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}$

$p = 0$

Inyectividad $\forall x, y$ $\frac{1+\sin(x)}{1-\cos x} = \frac{1+\sin y}{1-\cos y} \Rightarrow x = y$

pero $x = \frac{3}{2}\pi \wedge x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = 0$

Scanned with CamScanner

$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

P4 | $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado (superior e inferiormente)

tenemos $\exists \sup(A)$, $\exists \inf(A)$ por axioma supremo

Veamos que el conjunto ~~pre~~imagen de $f(A)$ posee ínfimo y sup.

- Debemos probar que es **NO VACÍO** y **ACOTADO**

1) Como $A \neq \phi$ y f está definida en todo $\mathbb{R}$, si $a \in A$, $\exists f(a)$ $\therefore$ $f(A) \neq \phi$

$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y \}$ || Imagen

2) $\exists \sup(A)$ e ínfimo de A $\neq 0$ $\wedge$ acotado

$\Rightarrow \forall x \in A \quad \inf(A) \leq x \leq \sup(A)$

Si son números reales puedo usar f

Si f es decreciente si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

$f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

$\inf(A) \leq x \quad \wedge \quad x \leq \sup(A)$

$f(x) \leq f(\inf(A)) \quad \wedge \quad f(\sup(A)) \leq f(x)$

$\Leftrightarrow$ $f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$ $\Rightarrow$ $f(A)$ está acotado

$\Rightarrow \exists \sup(f(A))$, $\exists \inf(f(A))$

- Además se tiene el conjunto $f(A)$ cumple

$\forall y \in f(A) \quad \inf(f(A)) \leq y \leq \sup(f(A)) \Rightarrow \inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$ 1

Scanned with CamScanner

tenemos que

$\forall x \in A$, $f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$

$\forall y \in f(A))$ $f(\sup(A) \leq y \leq f(\inf)(A))$

$\downarrow$ cota infe $\qquad$ $\downarrow$ Cota superior

y como $\sup(f(A)$ es la menor de las cotas superiores $\Rightarrow \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$ (2)

y como $\inf(f(A)$ es la mayor de cotas inferiores

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)$$ (3)

(1), (2) ∧ (3)

$f(\sup(A) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A) \leq f(\inf(A))$ $\blacksquare$

Ver lentamente.

Scanned with CamScanner

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

Scanned with CamScanner