

Pauta Guía Problemas Semana 9

Profesor: Jorge San Martín H.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcular

$$\lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}}.$$

Solución

Calculemos cada límite por separado:

- Es claro que $\lim \frac{2}{n} = 0$ (nula por acotada).
- La sucesión $a_n = 3 \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ es acotada pues

$$|a_n| = 3 \left| \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) \right| \leq 3.$$

Y como $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, concluimos que el límite vale 0 (nula por acotada).

- $\lim \frac{2n+1}{3-3n} = \frac{-2}{3}$ (límite conocido).
- $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$ (límite conocido).
- $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$ (nula por acotada).
- $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ (límite conocido) y por álgebra de límites $\frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}} \rightarrow 1$.

Por el teorema de álgebra de límites (todos los límites existen) concluimos que

$$\begin{aligned} \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^n}}} &= \frac{0 + 0 - \frac{2}{3}}{0 + 0 + 1} \\ &= \frac{-2}{3}. \blacksquare \end{aligned}$$

P2. Calcule $\lim p(n) \frac{a^n}{n^n}$ para $p(n)$ un polinomio de grado k , $k \in \mathbb{N}$. Puede ser de utilidad comenzar considerando el polinomio $p(n) = n^k$ y luego utilizar el álgebra de límites.

Solución

Siguiendo la indicación del enunciado, consideremos $p(n) = n^k$, con $k \in \mathbb{N}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} p(n) \frac{a^n}{n^n} &= \frac{n^k}{n^n} a^n \\ &= \frac{n^k}{n^k} \cdot \frac{a^{n-k}}{n^{n-k}} \cdot a^k \\ &= \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \cdot a^k. \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim p(n) \frac{a^n}{n^n} &= \lim \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \cdot a^k \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pues $\frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \rightarrow 0$, $\frac{(n-k)!}{n^{n-k}} \rightarrow 0$ (límites conocidos) y a^k es una constante. Observemos que de paso hemos demostrado que $\frac{a^n}{n^n} \rightarrow 0$.

Sabemos que un polinomio de grado k se escribe como

$$p(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$$

con $c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, k$. Luego

$$\begin{aligned} p(n) \frac{a^n}{n^n} &= \frac{a^n}{n^n} \sum_{i=0}^k c_i n^i \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{a^n}{n^n} \cdot c_i n^i \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{a^{n-i}}{n^{n-i}} \cdot a^i c_i. \end{aligned}$$

Concluimos, por álgebra de límites, que $\lim p(n) \frac{a^n}{n^n} = 0$. ■

P3. Demuestre que si $\lim na_n$ existe, entonces $\lim a_n = 0$.

Solución

Sea $\ell = \lim na_n$, que por hipótesis sabemos que existe. Notemos que $a_n = \frac{n \cdot a_n}{n}$, y luego

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \lim \frac{na_n}{n} \\ &= \lim na_n \cdot \lim \frac{1}{n} \\ &= \ell \cdot 0 \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

P4. Si se sabe que para α y β positivos $\lim n(\sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta))$ existe, se pide calcular el valor de α y de β , y luego el valor del límite.

Solución

Aplicando el resultado anterior, tenemos que $\sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta) \rightarrow 0$. Notemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta) &= \sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} + (\alpha n + \beta)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{n^2 + n + 1 - (\alpha n + \beta)^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{(1 - \alpha^2)n^2 + (1 - 2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + (\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{(1 - \alpha^2)n^2 + (1 - 2\alpha\beta)n + 1 - \beta^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + (\alpha n + \beta)} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{(1 - \alpha^2)n + (1 - 2\alpha\beta) + \frac{1 - \beta^2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)} \end{aligned}$$

Veamos que $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$. Debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left| \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Si analizamos el término entre módulo:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 &= \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Sea $\varepsilon' > 0$. Por Propiedad Arquimediana, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n_0\varepsilon'$.

Sea $n \geq n_0$, entonces $1 < n_0\varepsilon' \leq n\varepsilon' < n^2\varepsilon'$. Escogiendo $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon'$, tenemos que, para todo $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\left| \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1 \right| &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq \varepsilon' + \varepsilon' \\ &= 2\varepsilon' \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Concluimos que $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 1$.

Por álgebra de límites, tenemos que $\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) \rightarrow 1 + \alpha$, pues $\frac{\beta}{n} \rightarrow 0$. Luego, como el límite del denominador existe, necesariamente debe cumplirse que $\lim \left[(1 - \alpha^2)n + (1 - 2\alpha\beta) + \frac{1 - \beta^2}{n} \right] = 0$. Como sabemos que la sucesión $s_n = n$ diverge, para que el límite exista necesariamente $(1 - \alpha^2) = 0$, de donde $\alpha = 1$ (descartamos la solución negativa pues *a priori* sabemos que $\alpha > 0$). Además es claro que $\frac{1 - \beta^2}{n} \rightarrow 0$ y luego se debe tener que $\lim(1 - 2\beta) = 0$, lo que implica que $\beta = \frac{1}{2}$. Finalmente, observemos que de una igualdad anterior tenemos que (reemplazando los valores de α y β obtenidos)

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)}$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned}\lim n(\sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta)) &= \lim \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \left(1 + \frac{1}{2n}\right)} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1 + 1} \\ &= \frac{3}{8} \blacksquare\end{aligned}$$

P5. Sean (a_n) y (b_n) tales que $\lim a_n = l$ y $\lim b_n = r$. Demuestre que $\lim \max\{a_n, b_n\} = \max\{l, r\}$.

Solución

Presentaremos dos métodos de resolver este problema.

1. Demostraremos la siguiente propiedad.

Si $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ son tales que $x \leq u \wedge y \leq v$, entonces $\max\{x, y\} \leq \max\{u, v\}$.

Dem: Supongamos que x es el máximo. Si $u = \max\{u, v\}$, se tiene por hipótesis. Si tenemos el caso contrario, es decir $v = \max\{u, v\}$, entonces $u \leq v$ y por transitividad $x \leq v$. Para el caso $y = \max\{x, y\}$ se procede análogamente.

Como sabemos que $a_n \rightarrow l$, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n'_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'_0) \quad |a_n - l| \leq \varepsilon.$$

Analogamente, como $b_n \rightarrow r$ se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0'') \quad |b_n - r| \leq \varepsilon.$$

Luego, eligiendo $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$ obtenemos

$$(\forall n \geq n_0) \quad |a_n - l| \leq \varepsilon \wedge |b_n - r| \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$|a_n - l| \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

y lo mismo para b_n . Utilizando la propiedad recién probada obtenemos que

$$\max\{l - \varepsilon, r - \varepsilon\} \leq \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{l + \varepsilon, r + \varepsilon\}.$$

Recordemos que $\max a + A = a + \max A$, luego $\forall n \geq n_0$ se tiene que

$$\max\{l, r\} - \varepsilon \leq \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{l, r\} + \varepsilon.$$

Entonces por la propiedad del módulo recién vista concluimos que

$$|\max\{a_n, b_n\} - \max\{l, r\}| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $\max\{a_n, b_n\} \rightarrow \max\{l, r\}$.

2. Sabemos que (P2. Guía de Ejercicios Semana 8)

$$\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|).$$

Si logramos demostrar que $|a_n - b_n| \rightarrow |l - r|$, usando álgebra de límites podremos concluir. Veamos que esto es cierto. Debemos mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad ||a_n - b_n| - |l - r|| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Si observamos lo que está entre módulo, notamos que

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| - |l - r| &\leq |(a_n - b_n) - (l - r)| \\ &= |(a_n - l) + (r - b_n)| \\ &\leq |a_n - l| + |b_n - r| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $|a_n - b_n| \rightarrow |l - r|$ y usando álgebra de límites tenemos

$$\begin{aligned} \lim \max\{a_n, b_n\} &= \lim \left[\frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \right] \\ &= \frac{1}{2}(l + r + |l - r|) \\ &= \max\{l, r\}. \blacksquare \end{aligned}$$

P6. Sea $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función tal que para todo $n, t(n) \geq n$ y a_n una sucesión con $\lim a_n = l$. Demuestre que $\lim a_{t(n)} = l$.

Solución

Como sabemos que $a_n \rightarrow l$, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que $|a_n - l| \leq \varepsilon$. Pero $\forall n \geq n_0$, tenemos que $t(n) \geq n_0$ y luego $|a_{t(n)} - l| \leq \varepsilon$, lo que muestra que $a_{t(n)} \rightarrow l$. ■