

MA1001-3 Introducción al Cálculo, Otoño 2023

Profesor: Leonardo Sánchez Cancino

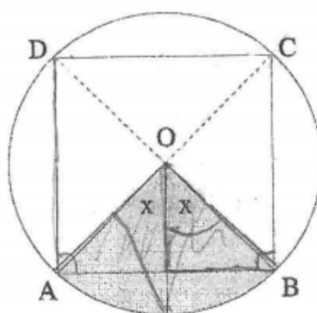
Auxiliares: Javier Santidrián Salas y Patricio Yáñez Alarcón



## Auxiliar 14 Preparación C6 Exponencial, Logaritmo y Límite de Funciones

Lunes 29 de Junio de 2023

**P1.** [*Calcular Límite*] Considere la circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  de la figura en la que se ha inscrito el rectángulo  $ABCD$ .



Se pide calcular:

$$\lim_{\widehat{AB} \rightarrow 0} \frac{\text{O}\{AOB\}}{\square\{ABCD\}}$$

**P2.**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} = \text{no existe} \clubsuit$

**P3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \frac{1}{\text{sen}^2(x)}$

**P4.** [*Constante Euler-Mascheroni*] **BRÍGIDO**

Demuestre que  $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$  e  $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$  son convergentes y que tienen igual límite.

**P5.** Calcule los siguientes límites de funciones:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x) - x}{1 - \cos(x) + 2x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

**P6.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in A$  tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$ . Pruebe que:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > 0$$

## Límite de funciones

### Resumen

- Notación.** Para un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}$  y una sucesión  $(x_n)_n$ , denotaremos  $(x_n)_n \subseteq A$  para decir que  $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$ .
- Punto de acumulación.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  y  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ . Diremos que  $\bar{x}$  es un punto de acumulación de  $A$  si existe una sucesión infinita en  $A$  convergente a  $\bar{x}$ , es decir, si existe una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  tal que  $x_n \neq \bar{x} \forall n \in \mathbb{N}$  y  $x_n \rightarrow \bar{x}$ .

Denotaremos por  $A'$  al conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$ .

- Definición de límite de funciones vía sucesiones.** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in A'$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Entonces diremos que:

$$L = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \iff f(x_n) = y_n \rightarrow L \forall \text{ sucesión infinita } (x_n)_n \subseteq A \text{ tal que } x_n \rightarrow \bar{x}$$

De este modo, diremos que el límite **no existe** si:

- $\bar{x} \notin A'$ ,
- Existe una sucesión  $(x_n)_n \subseteq A$  tal que  $x_n \rightarrow \bar{x}$  pero la sucesión  $(f(x_n))_n$  no converge.
- Existe un par de sucesiones  $(x_n)_n, (y_n)_n \subseteq A$  tal que  $x_n \rightarrow \bar{x}$  e  $y_n \rightarrow \bar{x}$ , pero las sucesiones  $(f(x_n))_n$  y  $(f(y_n))_n$  convergen a distintos límites, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

- Definición de límite  $\varepsilon - \delta$ .** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x} \in A'$  y  $L \in \mathbb{R}$ . Entonces diremos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([x - \delta, \bar{x}] \cup [\bar{x}, \bar{x} + \delta]) \cap A : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \\ &\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < |x - \bar{x}| \leq \delta : |f(x) - L| \leq \varepsilon) \end{aligned}$$

- Unicidad del límite.** El límite de una función, si existe, es único.
- Límites a través de subconjuntos.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función, y sea  $B \subseteq A$ . Definimos  $f|_B$  ( $f$  restringido a  $B$ ) tal que  $Dom(f|_B) = B$  y  $f|_B(x) = f(x) \forall x \in B$ . Se define entonces, para  $\bar{x} \in B' \subseteq A'$ , el límite a través de  $B$  como:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f|_B(x)$$

- Teorema.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sean además  $B, C \in \mathbb{R}$  tal que  $A = B \cup C$ , y sea  $\bar{x} \in B' \cap C'$ .

Entonces: 
$$L = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \text{ existe} \iff L = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in B}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in C}} f(x) \text{ existen (y son iguales)}$$

- Límites laterales.** Son el caso particular más usado de límites a través de subconjuntos. Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{x} \in A$ . Considerando entonces:  $A^+ = A \cap (\bar{x}, \infty)$ ,  $A^- = A \cap (-\infty, \bar{x})$ , entonces se pueden definir los límites laterales como:

$$\begin{aligned} \text{Límite por la derecha: } \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^+}} f(x) \\ \text{Límite por la izquierda: } \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ x \in A^-}} f(x) \end{aligned}$$

De esta manera, para  $L \in \mathbb{R}$  la definición  $\varepsilon - \delta$  queda:

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta] \cap A :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 < x - \bar{x} \leq \delta :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x}) \cap A :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 > x - \bar{x} \geq -\delta :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$

■ **Límites hacia infinito.** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $L \in \mathbb{R}$ .

• Si  $A$  es no acotado superiormente, entonces diremos que:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m, \infty) \cap A :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$

• Si  $A$  es no acotado inferiormente, entonces diremos que:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in (-\infty, m] \cap A :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$

• Observación: Se tiene que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$ .

■ **Límites infinitos.** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\bar{x} \in A'$ . Diremos que:

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in ([\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \setminus \{\bar{x}\}) \cap A : f(x) \leq M)$

Observación: Se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}} (-f(x)) = \infty$ .

■ **Asíntotas.** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función.

• **Asíntotas horizontales:** Para  $L \in \mathbb{R}$ , diremos que la recta  $y = L$  es asíntota horizontal de  $f$  si  $A$  es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \text{ o bien, } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Una función tiene a lo más dos asíntotas horizontales.

• **Asíntotas verticales:** Para  $\bar{x} \in A'$ , diremos que la recta  $x = \bar{x}$  es asíntota vertical de  $f$  si alguno de los siguientes se tiene:

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \infty,$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \infty,$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = -\infty,$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = -\infty$

• **Asíntotas oblicuas:** Para  $m, n \in \mathbb{R}$ , diremos que la recta  $y = m \cdot x + n$  es asíntota horizontal de  $f$  si  $A$  es no acotado (superior y/o inferiormente) y:

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m \cdot x),$	o bien
$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x)$	

Al igual que el caso horizontal, una función tiene a lo más dos asíntotas oblicuas. Es más, el caso  $m = 0$  coincide con el caso de asíntota horizontal.

- **Límites igual a  $L^+$  o  $L^-$ .** Sean  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $A$  no acotado superiormente, y  $L \in \mathbb{R}$ . Decimos que:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m, \infty) \cap A : 0 \leq f(x) - L \leq \varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
	$\iff (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L) \wedge (\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) > L)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in [m, \infty) \cap A : 0 \geq f(x) - L \geq -\varepsilon)$
	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L \geq f(x) \geq L - \varepsilon)$
	$\iff (\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L) \wedge (\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) < L)$

- **Álgebra de límites.** Sean  $f, g$  dos funciones y  $\bar{x} \in (Dom(f))' \cap (Dom(g))'$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)$  existen. Entonces se tiene que:

- $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x).$
- $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x).$
- $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)},$  si  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) \neq 0.$

Es importante señalar que estas propiedades son también válidas para  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+}, \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-}, \lim_{x \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow -\infty}$  siempre y cuando se cumpla la existencia de todos los límites asociados.

- **Límite de la composición o Cambio de variable.** Sea  $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función, y sean  $\bar{x} \in A', \bar{u} \in \mathbb{R}$  tal que  $\bar{u} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \bar{u}$ . Sea además  $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\bar{u} \in B'$  cumple que  $L = \lim_{x \rightarrow \bar{u}} f(x) = L$ . Entonces se tiene que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f \circ g)(x) = L}$$

Este teorema sirve como cambio de variable: Se tiene que:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow \bar{u}} f(u)}$$

para el cambio de variable  $u = g(x)$ , con  $\bar{u} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)$ . Este teorema sólo es válido si todos los límites asociados existen. Además, también es válido para  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+}, \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-}, \lim_{x \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow -\infty}$  siempre y cuando se cumpla la existencia y compatibilidad de todos los límites asociados.

- **Sandwich en funciones.** Sean  $f, g$  y  $h$  tres funciones y  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  tales que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = L$ . Si  $\exists \delta > 0$  tal que:

$$\forall x \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta] \cap Dom(g) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

entonces  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = L$ .

Este teorema también es válido para  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+}, \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-}, \lim_{x \rightarrow \infty}, \lim_{x \rightarrow -\infty}$  siempre y cuando se cumplan las hipótesis adaptadas a las funciones asociadas.

## Tabla de definiciones de límite

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 <  x - \bar{x}  \leq \delta :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m :  f(x) - L  \leq \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 <  x - \bar{x}  \leq \delta : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$	$\iff (\forall M > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : f(x) \geq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 <  x - \bar{x}  \leq \delta : f(x) \leq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : f(x) \leq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : f(x) \leq M)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : f(x) \leq M)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	$\iff (\forall M < 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : f(x) \leq M)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 <  x - \bar{x}  \leq \delta : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^+$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : L \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } 0 <  x - \bar{x}  \leq \delta : L - \varepsilon \leq  f(x) - L  \leq L)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} < x \leq \bar{x} + \delta : L - \varepsilon \leq  f(x) - L  \leq L)$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } \bar{x} - \delta \leq x < \bar{x} : L - \varepsilon \leq  f(x) - L  \leq L)$
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \geq m : L - \varepsilon \leq  f(x) - L  \leq L)$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$	$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists m < 0)(\forall x \in A \text{ tal que } x \leq m : L - \varepsilon \leq  f(x) - L  \leq L)$

### Tablas de límites conocidos

- Límites asociados a la continuidad: Sea  $\bar{x}$  en el dominio de la función a la que se le quiere calcular el límite. Se tiene entonces que:

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} c = c$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = a_n \bar{x}^n + \dots + a_1 \bar{x} + a_0$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} x = \bar{x}$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n \bar{x}^n + \dots + a_1 \bar{x} + a_0}{b_m \bar{x}^m + \dots + b_1 \bar{x} + b_0}$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{sen}(x) = \text{sen}(\bar{x})$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{cos}(x) = \text{cos}(\bar{x})$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{arc sen}(x) = \text{arc sen}(\bar{x})$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{arc cos}(x) = \text{arc cos}(\bar{x})$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \text{arctan}(x) = \text{arctan}(\bar{x})$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sqrt{x} = \sqrt{\bar{x}}$
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} e^x = e^{\bar{x}}$	$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \ln(x) = \ln(\bar{x})$

- Límites asociados a la diferenciabilidad: Los siguientes límites no triviales son conocidos:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

- Otros límites: A partir de los gráficos y propiedades de las funciones, se puede probar fácilmente que:

$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{arctan}(x) = \frac{\pi^-}{2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arctan}(x) = -\frac{\pi^+}{2}$