

Pauta Guía Problemas Semana 11

Profesor: Jorge San Martín H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right).$$

Solución

Notemos que

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) \\ &= \ln(k+1) - \ln(k). \end{aligned}$$

Luego, reemplazando en la suma obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$

que es una suma telescópica cuyo valor es $\ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$. Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Por otra parte, por propiedades del logaritmo tenemos que $\frac{1}{n} \ln(n+1) = \ln(\sqrt[n]{n+1})$ y como sabemos que $\sqrt[n]{n+1} \rightarrow 1$, por propiedad demostrada en el apunte $\ln(\sqrt[n]{n+1}) \rightarrow \ln(1) = 0$. ■

P2. Demuestre que $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

Solución

Comencemos viendo el crecimiento de (x_n) . Para ello, analicemos el signo de la diferencia de términos sucesivos, es decir

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

en donde para la última igualdad se han utilizado las propiedades del logaritmo.

De la Desigualdad Fundamental para el logaritmo sabemos que

$$\ln(x) \leq x - 1, \quad \forall x > 0.$$

Esto implica que

$$\frac{1}{n+1} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{1+n-n-1}{n+1} = 0$$

es decir

$$x_{n+1} - x_n \leq 0.$$

Por lo tanto (x_n) es decreciente. Si demostramos que (x_n) es acotada inferiormente, tendremos que es convergente. En efecto, veamos que $0 < x_n, \forall n \geq 2$.

En primer lugar notemos que de la Desigualdad Fundamental del logaritmo obtenemos que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Si sumamos estas desigualdades tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

pero del problema anterior sabemos que la suma de la izquierda vale $\ln(n)$, y así

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Observemos que la suma restante la podemos reescribir como

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} \ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n} &\implies \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = x_n \\ &\implies 0 \leq x_n. \end{aligned}$$

Se sigue que como (x_n) es decreciente y acotada inferiormente, entonces es convergente.

Nota: Este límite se conoce como la constante de Euler-Mascheroni y se suele anotar como γ .

Analicemos ahora la sucesión (y_n) . De su definición es directo que $y_n \leq x_n$, en particular, $y_n \leq \gamma$. Si logramos demostrar que es creciente, tendremos que es convergente. Con este fin, estudiemos la diferencia de términos sucesivos

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \left(x_n - \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Notando que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Nuevamente la Desigualdad Fundamental del logaritmo nos dice que $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq 1 - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n}$ y entonces

$$y_{n+1} - y_n \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0.$$

En conclusión, (y_n) es creciente y como teníamos que es acotada superiormente, converge.

Para ver que los límites son iguales basta notar que

$$y_n = x_n - \frac{1}{n} \implies \lim y_n = \lim x_n - \lim \frac{1}{n} = \lim x_n. \blacksquare$$

P3. Para $x > 0$, calcule $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Solución

En primer lugar notemos que $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln(x)}$, y por lo tanto $n(\sqrt[n]{x} - 1) = n(e^{\frac{1}{n} \ln(x)} - 1)$. Buscaremos calcular el límite usando el límite conocido

$$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \rightarrow 1$$

donde $a_n \rightarrow 0$. En efecto, notemos que $\frac{1}{n} \ln(x) \rightarrow 0$ y además que

$$\begin{aligned} n(e^{\frac{1}{n} \ln(x)} - 1) &= n(e^{\frac{1}{n} \ln(x)} - 1) \cdot \frac{\frac{1}{n} \ln(x)}{\frac{1}{n} \ln(x)} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{n} \ln(x)} - 1}{\frac{1}{n} \ln(x)} \cdot \ln(x). \end{aligned}$$

En conclusión, por Álgebra de Límites tenemos que $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln(x)$. \blacksquare

P4. Calcule $\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a 0.

Solución

Notemos que

$$(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} = \exp\left(\frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1}\right).$$

Observemos que se puede reescribir el argumento de la exponencial como

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1 + a_n)}{\exp(2a_n) - 1} &= \frac{\ln(1 + a_n)}{2a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{2a_n}{\exp(2a_n) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} \cdot \frac{1}{\frac{\exp(2a_n) - 1}{2a_n}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que $\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \rightarrow 1$ y $\frac{\exp(2a_n)-1}{2a_n} \rightarrow 1$ cuando $a_n \rightarrow 0$, por Álgebra de Límites concluimos que $\frac{\ln(1+a_n)}{\exp(2a_n)-1} \rightarrow \frac{1}{2}$, y por propiedad demostrada en el apunte

$$\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n) - 1}} = \sqrt{e}. \blacksquare$$

P5. Las tasas de interés de tres instituciones son 6% anual, 0,5% mensual y $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años, respectivamente. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de α : 0, 1 y $\ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interés es $t\%$, entonces el capital aumenta en ese periodo en un factor $(1 + \frac{t}{100})$.

Solución

Si llamamos C_0 al capital inicial, entonces para cada institución tenemos que el capital luego de cinco años será

- 6% anual $\implies C_f = C_0 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5$
- 0,5% mensual $\implies C_f = C_0 \left(1 + \frac{5}{1000}\right)^{60}$
- $100(e^{0,3\alpha} - 1)\%$ cada cinco años $\implies C_f = C_0 \left(1 + \frac{100(e^{0,3\alpha} - 1)}{100}\right) = C_0 e^{0,3\alpha}$.

Recordando que para la exponencial tenemos $x + 1 \leq e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ obtenemos, para las primeras dos instituciones

- $C_0 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \leq C_0 (e^{6/100})^5 = C_0 e^{0,3}$
- $C_0 \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{60} \leq C_0 (e^{0,5/100})^{60} = C_0 e^{0,3}$

Luego, si $\alpha \geq 1$ tenemos que la tercera institución proporciona una mayor rentabilidad. Si $\alpha = 0$, la tercera institución no presenta utilidad y luego será la última en el ranking.

Para ver como se comparan las otras dos instituciones notemos en primer lugar que su rentabilidad no depende de α , por lo que podemos evaluar numéricamente obteniendo

- $\left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 \approx 1,34$
- $\left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{60} \approx 1,35$

Por ende, la segunda institución siempre da mayor rentabilidad que la primera.

En resumen, dependiendo de α tenemos lo siguiente

	Valor de α		
Lugar	0	1	$\ln 3$
1^{er}	2	3	3
2^{do}	1	2	2
3^{er}	3	1	1

P6. Para la función $f(x) = \ln(1 + e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para qué valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Solución

Rápidamente notamos que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Para ver los ceros de f debemos resolver la ecuación $\ln(1 + e^x) = 0$ en el dominio de f . No es difícil verificar que esta ecuación no posee solución, pues $f(x) = 0 \iff 1 + e^x = 0$ y sabemos que $\forall x \in \mathbb{R} e^x \geq 0$. Luego f no tiene ceros, es decir, $Z(f) = \emptyset$.

Trivialmente, f es creciente por ser composición de funciones crecientes. Además f es siempre positiva, pues $f(x) < 0 \iff 1 + e^x < 1 \implies e^x < 0$ lo que no es posible.

Supongamos que y es tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x obtenemos

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln(1 + e^x) \\ &\iff e^y = 1 + e^x \\ &\iff e^y - 1 = e^x \\ &\iff \ln(e^y - 1) = x. \end{aligned}$$

Notemos que para que esto tenga sentido, debe ser que $e^y - 1 > 0$, es decir, $e^y > 1 \implies y > 0$. Luego, la ecuación tiene solución sólo si $y > 0$. Con todo lo anterior, y observando que

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R} &\rightarrow (0, +\infty) \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) = f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva, podemos definir

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1). \end{aligned}$$

Repetiendo el proceso para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, observamos que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Para encontrar los ceros de f , debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, con $x \in \text{Dom } f$. Así

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 0 \\ &\iff e^x = e^{-x} \\ &\iff e^{2x} = 1 \\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, $Z(f) = \{0\}$.

Es fácil ver que f es creciente, por ser álgebra de funciones crecientes.

Notemos que f es impar, y entonces sólo nos basta analizar el intervalo $(0, +\infty)$. Para ver dónde es positiva, debemos resolver la inecuación $f(x) > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}f(x) > 0 &\iff \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) > 0 \\ &\iff e^x > e^{-x} \\ &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff x > 0.\end{aligned}$$

Luego, f es positiva en $(0, +\infty)$ y por imparidad es negativa en $(-\infty, 0)$.

Sea ahora un y tal que la ecuación $y = f(x)$ tiene solución. Si despejamos x tenemos

$$\begin{aligned}y = f(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff 2y = e^x - e^{-x} \\ &\iff 2ye^x = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.\end{aligned}$$

Llamemos $u = e^x$, entonces tenemos la ecuación $u^2 - 2uy - 1 = 0$ que es cuadrática en u y resolviendo

$$u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

y recordando que $x = \ln u$ obtenemos

$$x = \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1} \right)$$

donde descartamos la solución negativa pues $\ln x$ está definida solamente para números positivos.

Observemos que f es biyectiva tal como está definida y luego tiene sentido

$$\begin{aligned}f^{-1} : (0, +\infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).\end{aligned}$$

Observación: La función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ se llama *Seno Hiperbólico* y se anota $\sinh x$.