Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
03 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 12

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Demuestre que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas oblicuas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

Solución

En primer lugar, notemos que necesitamos tener la hipérbola como una función de x. Para obtener la forma deseada, podemos despejar y de la ecuación y pensar que $y = y(x)$ y aplicar definición de asíntota. Para simplificar un poco los cálculos, trabajaremos con la hipérbola definida por la ecuación con 1, el caso para -1 es análogo y queda propuesto al lector. Despejando entonces

$$y(x) = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Para ver que las rectas $\pm\frac{b}{a}x$ sólo debemos mostrar que (por definición)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) \mp \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

La razón del límite hacia $\pm\infty$ es que, como $y(x)$ tiene dos 'partes', una asíntota corresponderá al límite hacia $+\infty$ y la otra hacia $-\infty$. Veamos esto en un dibujo:

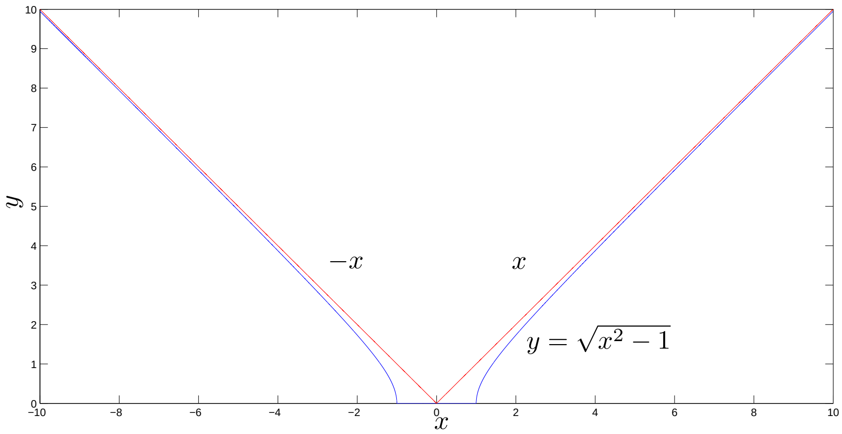

Figura 1: Gráfico de la hipérbola para $a = b = 1$.

Calculemos entonces el límite, para esto observemos que

$$\begin{aligned} y(x) \mp \frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x \\ &= \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x\right) \cdot \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \pm \frac{b}{a}x}{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \pm \frac{b}{a}x} \\ &= \frac{b}{a}\left(\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x}\right) \\ &= \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[y(x) \mp \frac{b}{a}x\right] = 0.$$

Los demás casos son análogos y se dejan como ejercicio.

P2. Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, demuestre que el dominio A de f permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ ssi existe al menos una sucesión (s_n) en A que cumple $s_n \to x_0$ y $s_n > x_0,\ \forall n$.

Use este resultado para estudiar si en los siguientes casos, los dominios de las funciones permiten o no estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$

(a) $A = (x_0, x_0 + 1)$

(b) $A = \{x_0 + \frac{1}{n}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

(c) $A = \{x_0 + \frac{n}{n+1}\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

(d) $A = \{x_0 + \frac{m+n}{mn}\ :\ n, m \in \mathbb{N}\}$

(e) $A = (x_0, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$

(f) $A = \mathbb{Q}$

(g) $A = \{x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\ :\ n \in \mathbb{N}\}$

Solución

Demostremos la doble implicancia:

- $\Longrightarrow$) Como sabemos que f permite estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$, tenemos que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta].$$

Como es para todo $\delta > 0$, consideremos la sucesión $\delta_n = \frac{1}{n}$ decreciente y convergente a 0. Luego, para cada δ_n podemos encontrar $s_n \in A \cap (x_0, x_0 + \delta_n]$. Notemos que por estar en la intersección, $s_n \in A$ y además $s_n > x_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ (pues $s_n \in (x_0, x_0 + \delta_n]$).

Para ver la convergencia, tomemos $\varepsilon > 0$. Observemos que como $s_n \in (x_0, x_0 + \delta_n]$, entonces $s_n - x_0 \in (0, \delta_n]$ de donde concluimos que

$$0 \leq |s_n - x_0| \leq \delta_n$$

y por Sandwich de Sucesiones deducimos que $s_n \to x_0$.

- $\Longleftarrow$) Dado que $s_n \to x_0$ sabemos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$

y puesto que $s_n \in A$ tenemos

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in A \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Pero por hipótesis $s_n > x_0$ y luego $s_n \notin [x_0 - \varepsilon, x_0]$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad s_n \in A \cap (x_0, x_0 + \varepsilon]$$

y si elegimos $\delta = \varepsilon$ tenemos que

$$\forall \delta > 0, \exists x = s_{n_0} \in A \cap (x_0, x_0 + \delta]$$

lo que significa que A permite estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$.

Estudiemos los conjuntos propuestos

(a) Sí permite, pues podemos tomar por ejemplo $s_n = x_0 + \frac{1}{n+1}$. Notemos que no podemos tomar $s_n = x_0 + \frac{1}{n}$, pues $s_1 \notin A$.

(b) Sí permite. Tomamos $s_n = x_0 + \frac{1}{n}$.

(c) No permite, pues cualquier sucesión (s_n) que podamos tomar no convergerá a x_0, puesto que deberá ser de la forma

$$s_n = x_0 + \frac{n}{n+1} \to x_0 + 1.$$

(d) Si $m \neq n$, A permite estudiar el límite, pues una sucesión en el conjunto será de la forma

$$s_{n,m} = x_0 + \frac{m+n}{mn} = x_0 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} x_0.$$

Esto bajo el supuesto que n y m se pueden mover libremente hacia el infinito, ya que en la definición de A no se impone la restricción de que alguno sea fijo. Por otro lado, si $m = n$, A sí permitirá estudiar el límite pues podemos elegir

$$s_n = x_0 + \frac{2n}{n^2} = x_0 + \frac{2}{n} \to x_0$$

y además cumple las hipótesis necesarias.

(e) Sí permite, pues por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, siempre podemos tomar una sucesión racional tal que $s_n \to x_0$ (independiente de si x_0 es racional o no).

(f) Permite, por las mismas razones anteriores.

(g) Sí permite pues $s_n = x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \to x_0$ y verifica todo lo pedido pues, para $\theta \approx 0$ se tiene la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. Esto implica que, en el límite $x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \approx x_0 + \frac{1}{n}$, y esta última sucesión sí cumple las hipótesis.

P3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Usando la definición de límite cuando $x \to +\infty$, demuestre que

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\{f(x), \ell\} = \ell$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \max\left\{f(x), \ell + \dfrac{1}{x}\right\} = \ell^+$.

Solución

- Como sabemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$, entonces por definición de convergencia de f tenemos
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall x \geq m) \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$
y similarmente para g
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists m' > 0)(\forall x \geq m') \quad |g(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
Luego, si $m'' = \max\{m, m'\}$ entonces $\forall x \geq m''$ se tiene que
$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \wedge |g(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
Notemos que
$$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$$
y lo mismo para g. Luego, por propiedad de máximo, se tiene que
$$\max\{\ell - \varepsilon, \ell - \varepsilon\} \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \max\{\ell + \varepsilon, \ell + \varepsilon\}.$$
En conclusión, tenemos que $\forall x \geq m''$
$$\ell - \varepsilon \leq \max\{f(x), g(x)\} \leq \ell + \varepsilon \Longleftrightarrow |\max\{f(x), g(x)\} - \ell| \leq \varepsilon$$
de donde se deduce que
$$\lim_{x\to+\infty} \max\{f(x), g(x)\} = \ell.$$
- Claramente esto es una consecuencia de lo probado anteriormente considerando $g(x) = \ell$.

- Para probar que el límite vale ℓ^+, debemos demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} = \ell$ y que $\max\left\{f(x), \ell + \frac{1}{x}\right\} > \ell$. Es claro que la segunda condición es cierta por definición de máximo, y el límite se concluye de la primera parte, tomando $g(x) = \ell + \frac{1}{x} \to \ell$.

P4. Demuestre que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la propiedad pero $f(x) = x^2$ no.
Solución
Dada la propiedad, notemos que tomando $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 + \frac{1}{u}$ se tiene que

$$0 \leq \left| f(x_0) - f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right)\right| \leq L\left|x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right| = L\left|\frac{1}{u}\right|$$

y tomando límite en $u \to +\infty$, por Sandwich concluimos que

$$\lim_{u\to+\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = f(x_0)$$

es decir

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

El límite hacia x_0^- se concluye análogamente considerando $x_2 = x_0 - \frac{1}{u}$.

- Veamos que $f(x) = x$ cumple la propiedad. En efecto, notemos que si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces

  $$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall L \geq 1.$$

  En particular, tomando $L = e^\pi$, se concluye.
- Veamos que $f(x) = \operatorname{sen} x$ verifica la propiedad. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, notemos que

  $$|\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| = \left|2\cos\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leq \left|2\operatorname{sen}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\right| \leq |x_1 - x_2|$$

  de donde se obtiene que $L = 1$ cumple lo pedido.
- Por otra parte, $f(x) = x^2$ no cumple la propiedad, pues si la cumpliera, tendríamos que $\exists \bar{L} > 0$ tal que

  $$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \leq \bar{L}|x_1 - x_2| \iff |x_1 + x_2| \leq \bar{L}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

  Pero tomando $x_1 = x_2 = \bar{L}$ concluiríamos que $2\bar{L} \leq \bar{L}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ no cumple la propiedad.

Nota: Esta condición se llama Lipschitzianidad (en honor a Rudolph Lipschitz) de una función. Se dice que una función que cumple la condición es Lipschitz de constante L, o simplemente L-Lipschitz.

P5. Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Pruebe que

(a) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

(b) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ si (q_n) es una sucesión que converge a x_0 tal que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $q_n > x_0$, entonces $\lim f(q_n) = f(x_0)$.

(c) $(\forall q \in \mathbb{Q})$ se cumple $f(q) = qf(1)$.
Indicación: pruebe por inducción la fórmula para $q \in \mathbb{N}$, y luego extiéndala a $q \in \mathbb{Z}$ y $q = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$.

(d) $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple $f(x_0) = x_0 f(1)$.
Indicación: use la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$.

Solución

(a) Notemos que:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{u\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to\infty}\left[f(x_0) + f\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

En este punto, notamos que $\lim_{u\to\infty} f(\frac{1}{u}) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, que sabemos que existe. Luego, por álgebra de límites:

$$\lim_{u\to\infty}\left[f(x_0) + f\left(\frac{1}{u}\right)\right] = \lim_{u\to\infty} f(x_0) + \lim_{u\to\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = \lim_{u\to\infty} f(x_0) + \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0) + f(0).$$

Vemos que probando que $f(0) = 0$, llegaríamos al resultado. Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) = f(0) + f(0) && \text{(Propiedad de } f\text{)} \\ &\implies f(0) = f(0) + f(0) \\ &\iff f(0) = 0 \end{aligned}$$

Así, uniendo todo lo anterior, hemos demostrado que, $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

(b) Observemos que $q_n \to x_0^+$, y entonces $q_n - x_0 \to 0^+$. Antes de seguir, probemos las siguientes propiedades

- $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(-x) = -f(x)$. Basta notar que $f(0) = 0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$ de donde se concluye.
- $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$ $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$. Del hecho que $f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) + f(-x_2)$ y de la propiedad anterior se concluye.

Teniendo esto, observemos que $f(q_n - x_0) = f(q_n) - f(x_0)$ y luego $\lim f(q_n) - f(x_0) = \lim f(q_n - x_0)$. Si logramos demostrar que teniendo una sucesión $a_n \to 0^+$, entonces $\lim f(a_n) = 0$ podremos concluir. Notemos que esta propiedad no es equivalente a la propiedad del enunciado, porque aquí estamos tomando límite de sucesiones.
Sea entonces $a_n \to 0^+$, esto quiere decir que $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y además

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad a_n \leq \epsilon.$$

Por otra parte, sabemos que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ o equivalentemente $\lim_{u\to+\infty} f\left(\frac{1}{u}\right) = 0$, esto quiere decir que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m > 0)(\forall u \geq m) \quad \left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Debemos demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \quad |f(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$, luego $\exists m > 0$ tal que $\left|f\left(\frac{1}{u}\right)\right| \leq \varepsilon$, $\forall u \geq m$. Pero de la convergencia de a_n, tenemos que para $\epsilon = \frac{1}{m}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq \frac{1}{m}$, es decir $\frac{1}{a_n} \geq m$, $\forall n \geq n_0$. Luego tomando $n_0' = n_0$ tenemos que $\forall n \geq n_0'$, $\frac{1}{a_n} \geq m$ y luego

$$\left|f\left(\frac{1}{\frac{1}{a_n}}\right)\right| = |f(a_n)| \leq \varepsilon.$$

Esto implica que $\lim f(a_n) = 0$.
De aquí podemos concluir que $\lim f(q_n) - f(x_0) = \lim f(q_n - x_0) = 0$, de donde se deduce que $\lim f(q_n) = f(x_0)$.

(c) Sigamos la indicación. Comencemos probando la propiedad para el caso $q \in \mathbb{N}$ por inducción. El caso base es directo, ya que $f(1) = 1f(1)$. Supongamos ahora que se tiene para $n \in \mathbb{N}$, y busquemos probar que también se tiene para el caso $n+1$. En efecto, tenemos que:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1).$$

Por lo tanto, la propiedad se tiene para los números naturales.
Extendamos ahora la propiedad para los enteros. Aquí tenemos dos casos, si $q \in \mathbb{Z}$ es tal que $q > 0$, tenemos exactamente el caso anterior. Para el caso $q < 0$, usando que $f(q + (-q)) = f(0) = 0$, notemos que:

$$f(q + (-q)) = f(q) + f(-q) = 0 \Longrightarrow f(q) = -[f(-q)].$$

Y como $q < 0 \Longrightarrow -q > 0$, concluimos que:

$$f(q) = -[-qf(1)] = qf(1),$$

por lo que tenemos la propiedad, $(\forall q \in \mathbb{Z})$.
Ahora, probemos la propiedad para $q = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Para esto, notemos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$. Por lo tanto, aplicando la función en la igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\right) = f(1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \qquad \text{(Propiedad de } f\text{)} \\ &\Longleftrightarrow \quad nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) \\ &\Longleftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1) \qquad (\star) \end{aligned}$$

Con esto, para concluir el caso general, notemos que $q \in \mathbb{Q}$ se puede escribir de la forma $q = \frac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
Probaremos primero el caso para $m > 0$. Notemos que $\frac{m}{n} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n}$, y por la propiedad que cumple la función, tenemos que

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{m} f\left(\frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right),$$

y por la propiedad $(\star)$, se concluye que $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} f(1)$, $(\forall m > 0)$.
Para el caso $m < 0$, se procede de forma similar, pero para que tenga sentido el límite superior de la sumatoria, recurrimos a expresar la fracción como $\frac{m}{n} = -\sum_{i=1}^{-m} \frac{1}{n}$. El resto de la demostración, queda como ejercicio para el lector.
Con todo lo anterior, queda demostrado que $(\forall q \in \mathbb{Q}),\ f(q) = qf(1)$.

(d) Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$ podemos construir una sucesión q_n tal que $q_n \to x_0^+$ y $q_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por la parte anterior $f(q_n) = q_n f(1)$ y por ende

$$\lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = \lim q_n \cdot \lim f(1) = x_0 f(1).$$

Para concluir notemos que nos falta verificar que $\lim f(q_n) = f(x_0)$, pero esto lo probamos en la parte (b). Por lo tanto

$$f(x_0) = x_0 f(1). \blacksquare$$

P6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que verifican:

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2)$$

(a) Muestre que $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$, $g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2)$.

(b) Probar que si g es una función acotada entonces $(\forall x_0 \in \mathbb{R})$ se cumple

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(c) Probar que si

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a).$$

Solución

(a) De la propiedad enunciada, obtenemos directamente que

$$f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2) \Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

Ahora, como sabemos que la propiedad se cumple para cualquier valor de x, invirtiendo la posición de x_1 y x_2, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2)(x_2 - x_1) &\Longleftrightarrow -g(x_2)(x_2 - x_1) \geq f(x_2) - f(x_1) \\ &\Longleftrightarrow g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1). \end{aligned}$$

Y finalmente, uniendo ambas desigualdades, podemos concluir que, $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})$:

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2).$$

(b) Como g es acotada, tenemos que $(\exists M, m \in \mathbb{R})$ tales que $m \leq g(x) \leq M$, $(\forall x \in \mathbb{R})$. De la parte anterior,

$$g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2),$$

y como esto se cumple para todo valor de x_1 y x_2, tomemos en particular a $x_1 = x_0$, y $x_2 = x_0 + \frac{1}{u}$. Así,

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad g\left(x_0 + \frac{1}{u}\right)\left(x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right) \geq f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) - f(x_0) \geq g(x_0)\left(x_0 - x_0 - \frac{1}{u}\right) \\ &\Longrightarrow \quad M\left(-\frac{1}{u}\right) \geq f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) - f(x_0) \geq m\left(-\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

De donde, tomando el límite cuando $u \to \infty$, concluimos por Teorema del Sandwich que

$$\lim_{u \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = f(x_0),$$

lo que, denotando $x = x_0 + \frac{1}{u}$, equivale a decir que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Considerando ahora $x_1 = x_0$ y $x_2 = x_0 - \frac{1}{u}$, y procediendo en forma análoga a lo anterior, se concluye que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Por ende, hemos demostrado que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

(c) De la primera parte, considerando $x_1 = x = a + \frac{1}{u}$ y $x_2 = a$,

$$\begin{aligned} g(x)(x-a) \leq f(a) - f(x) \leq g(a)(x-a) \\ g(x) \leq \frac{f(a)-f(x)}{x-a} \leq g(a) \\ -g(x) \geq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq -g(a), \end{aligned}$$

donde $x - a = \frac{1}{u} > 0$, por lo que pudimos dividir sin problemas, y manteniendo la desigualdad. Luego, tomando el límite cuando $x \to a^+$, concluimos por Teorema del Sandwich, que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -g(a).$$

Para el caso de $x \to a^-$, el proceso es análogo, salvo porque, aquí, $x - a < 0$ y se debe invertir la desigualdad al momento de dividir. De todas formas, esto queda como ejercicio para el lector. Hecho esto, queda demostrado que:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -g(a).$$