Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
17 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 13

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Calcule los siguientes límites, si es que existen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi))$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)}$.

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x}$.

Solución:

(a) Realizando un cambio de base, para trabajar sólo con logaritmos naturales, tenemos que

$$(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) = \frac{\ln(2)}{\ln(1+x)} + \frac{\ln(\pi)}{2\ln(1+x)}.$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) &= \lim_{x\to 0} x\left(\frac{\ln(2)}{\ln(1+x)} + \frac{\ln(\pi)}{2\ln(1+x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\right)\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)
\end{aligned}$$

Y finalmente, recordando que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} x(\log_{1+x}(2) + \log_{(1+x)^2}(\pi)) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\ln(2)+\ln(\pi)}{2}\right)\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right) = \ln(2\sqrt{\pi}).$$

(b) Observamos que $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1}$ propiamente, y por teorema de la composición, concluimos que $\lim\limits_{x\to 1} \cos(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{1})$. Repitiendo el argumento, podemos asegurar en forma análoga que $\lim\limits_{x\to 1} \ln(\cos(\sqrt{x})) = \ln(\cos(\sqrt{1}))$. Finalmente, por álgebra de límites, concluimos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(\cos(\sqrt{x}))}{x} = \ln(\cos(\sqrt{1})).$$

(c) Desarrollando la expresión, notemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)}}{\ln(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(2)} - e^{x\ln(3)} - 1 + 1}{\ln(1+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x\ln(2)} - 1}{\ln(1+x)} - \frac{e^{x\ln(3)} - 1}{\ln(1+x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{(e^{x\ln(2)} - 1)}{x\ln(2)} \frac{x}{\ln(1+x)} \ln(2) - \frac{(e^{x\ln(3)} - 1)}{x\ln(3)} \frac{x}{\ln(1+x)} \ln(3)\right)
\end{aligned}$$

Y dado que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(2)}-1)}{x\ln(2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(3)}-1)}{x\ln(3)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, por álgebra de límites, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{\ln(1+x)} = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

(d) Nuevamente, desarrollemos la expresión hasta llegar a límites conocidos.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x - 1 + 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - 1}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - 1}{\operatorname{sen}(x)} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \frac{e^x - 1}{x} \right) \end{aligned}$$

Y ya que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)}-1}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, por álgebra de límites, se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(x)} - e^x}{x} = 1 - 1 = 0.$$

P2. Determine la existencia de $\lim\limits_{x\to x_0} [x]x$, para cada $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solución:
Intentemos descartar algunos puntos. Si consideramos $x_0 \in \mathbb{Z}$, notemos que

$$\lim_{x\to x_0^-} [x]x = \lim_{u\to +\infty} \left[x_0 - \frac{1}{u}\right] \left(x_0 - \frac{1}{u}\right) = (x_0 - 1)x_0.$$

Y por otro lado

$$\lim_{x\to x_0^+} [x]x = \lim_{u\to +\infty} \left[x_0 + \frac{1}{u}\right] \left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = x_0^2.$$

Así, notamos que el único número en $\mathbb{Z}$ que verifica la igualdad de estas expresiones es $x_0 = 0$. Por lo tanto, concluimos que el límite no existe, $(\forall x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

Ahora, para considerar a los elementos que nos quedan en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, consideremos $x_0 \in (m, m+1)$, $(\forall m \in \mathbb{Z})$, y calculemos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to x_0^-} [x]x = \lim_{u\to +\infty} \left[x_0 - \frac{1}{u}\right] \left(x_0 - \frac{1}{u}\right) = [x_0]x_0,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} [x]x = \lim_{u\to +\infty} \left[x_0 + \frac{1}{u}\right] \left(x_0 + \frac{1}{u}\right) = [x_0]x_0.$$

Lo que implica que, $\forall x_0 \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} [x]x$ existe, y más aún:

$$\lim_{x\to x_0} [x]x = [x_0]x_0.$$

P3. Sea f una función tal que $f(x) \geq 1$ para todo $x \geq 0$ y $f(x) \leq 0$ para todo $x < 0$. Determine cuáles de los siguientes límites nunca pueden existir: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solución:
Dadas las condiciones del problema, vemos directamente que los límites laterales a $x = 0$ verificarían lo siguiente:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq 1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \leq 0.$$

Por lo tanto, nunca se dará que los límites laterales sean iguales, lo que nos permite concluir que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ jamás podrá existir.

P4. Determine para qué valores de a el siguiente límite existe: $\lim\limits_{x\to 0} |x|^a(1-e^x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución:
Desarrollemos la expresión:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} |x|^a(1-e^x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} -|x|^a(e^x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} -|x|^a\frac{(e^x-1)}{x}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}
\end{aligned}$$

Y recordando que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}=0$, concluimos que el límite pedido existe si y sólo si $\lim\limits_{x\to 0}|x|^a$ existe, lo que sólo ocurre si $a\geq 0$.

P5. Calcule $\lim\limits_{v\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}$, demostrando que para todo $v\in[0,1]$, $0\leq \operatorname{arcsen}(v)\leq\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$ y aplicando el Teorema del Sandwich.

Solución:
Recordemos que, $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ se tiene que $\operatorname{sen}(x)\leq x\leq \operatorname{tg}(x)$. Si hacemos el cambio de variables $v=\operatorname{sen}(x)$, observamos en primer lugar que $v\in[0,1]$. Además, reescribiendo la desigualdad anterior se tiene

$$v\leq \operatorname{arcsen}(v)\leq \operatorname{tg}(\operatorname{arcsen}(v)).$$

Por otra parte, observemos que $\operatorname{tg}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}=\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$. En resumen

$$\forall v\in[0,1]\quad v\leq \operatorname{arcsen}(v)\leq\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Luego, si dividimos por v obtenemos

$$1\leq\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}\leq\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

y por teorema del Sandwich, haciendo $v\to 0$ concluimos que

$$\lim_{v\to 0}\frac{\operatorname{arcsen}(v)}{v}=1.$$

P6. Usando la definición de $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ demuestre que

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}(x)=\frac{\pi}{2}$$

Para $\varepsilon>0$, escoja $m=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$. Recuerde que arctg es creciente y acotada superiormente por $\frac{\pi}{2}$.

Solución:
Como se pide demostrar el límite por definición, debemos probar que

$$(\forall\varepsilon>0),(\exists m>0),\forall x\in[m,+\infty),\ \left|\operatorname{arctg}(x)-\frac{\pi}{2}\right|\leq\varepsilon.$$

Siguiendo la indicación, dado $\varepsilon>0$, consideremos $m=\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$. Luego, para $x\geq m$, y dado que la función arctg es creciente, tenemos que

$$x\geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\Longrightarrow \operatorname{arctg}(x)\geq\frac{\pi}{2}-\varepsilon,$$

y ocupando la última información presente en la indicación, notemos que, para todo x,

$$\operatorname{arctg}(x)\leq\frac{\pi}{2}\leq\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

Por lo tanto, uniendo la información recolectada:

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \operatorname{arctg}(x) \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon,$$

lo que justamente quiere decir que

$$\left|\operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq \varepsilon,$$

de donde se concluye lo que queríamos demostrar.

P7. Calcule todas las asíntotas de la siguiente función y determine si $\lim_{x\to 0}$ existe.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x) & x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} & 1 < x \end{cases}$$

Solución:
Comencemos calculando las asíntotas horizontales. Directamente, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

de donde vemos que $\frac{2+x+x^2}{1-x^2} \to -1$, y $e^{-\frac{1}{x^2}} \to 1$. Luego, por álgebra de límites, concluimos que la recta $y = -1$ es asíntota horizontal de f en $+\infty$. Ahora, calculemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(-x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\operatorname{arctg}(x) \\ &= -\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}(x) \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

De donde se concluye que la recta $y = -\frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal de f en $-\infty$.

Calculemos ahora las asíntotas verticales. Notemos que los únicos lugares donde podrían existir es justo donde se cambia la definición de la función. Siendo así, debemos calcular los límites para $x \to 0^+$, $x \to 1^-$ y para $x \to 1^+$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{(x-1)} = -1,$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{1}{(x-1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{2+x+x^2}{1-x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = -\infty.$$

Luego, concluimos que la recta $x = 1$ es asíntota vertical de la función.

Ahora, veamos la posible existencia de asíntotas oblicuas. Para esto, calculemos m para cada una de ellas:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x+x^2}{x-x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot 1 = 0,$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))} = \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\operatorname{tg}(u)} = \lim_{u\to-\frac{\pi}{2}} \frac{u\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)} = 0.$$

Y notemos que al calcular n_1 y n_2, volveremos a obtener las asíntotas horizontales de la función (lógico, ya que las pendientes de las posibles oblicuas dieron cero). Por lo tanto, f no posee asíntotas oblicuas.

Finalmente, veamos si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. Para esto, notemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{1}{(x-1)} = -1,$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}(x) = 0.$$

Luego, como los límites laterales son distintos, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

P8. Sea f una función tal que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ y sea $g(x) = \operatorname{sen}(x)f(x)$. Demuestre que si $\ell = 0$ entonces $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$ y que si $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ existe, entonces $\ell = 0$.

Solución:
El primer resultado es directo (nula por acotada).

Para la segunda implicancia pedida, usaremos el truco utilizado en el apunte para demostrar que $\operatorname{sen}(x)$ no posee límite.
Así, definiendo $a_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ y $b_n = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, notemos que $\lim a_n = \lim b_n = +\infty$, y además,

$$g(a_n) = \operatorname{sen}(a_n)f(a_n) = f(a_n) \quad \wedge \quad g(b_n) = \operatorname{sen}(b_n)f(b_n) = -f(b_n).$$

Luego, como sabemos que g posee límite para $x \to +\infty$, evaluando para a_n y b_n, tenemos lo siguiente:

$$\lim g(a_n) = \lim f(a_n) = \ell \quad \wedge \quad \lim g(b_n) = \lim -f(b_n) = -\lim f(b_n) = -\ell.$$

Y finalmente, por la unicidad del límite, se debe cumplir que $\ell = -\ell$, lo que sólo se tiene si $\ell = 0$.

P9. Demuestre que para todo polinomio $p(x)$ se cumple que $\lim_{x\to +\infty} p(x)e^{-x} = 0$.

Solución:
En primer lugar demostremos que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x\to +\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Para esto tomemos $k \in \mathbb{N}$. Notemos que podemos escribir $e^x = \left(e^{\frac{x}{k+1}}\right)^{k+1}$ y aplicando la desigualdad de la exponencial a $e^{\frac{x}{k+1}}$ tenemos que

$$\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1} \leq e^x.$$

Además, como estamos tomando límite hacia $+\infty$ tendremos que $x > 0$ y luego

$$0 \leq \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{x^k}{\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}.$$

Notando que en el lado derecho tenemos una división de Polinomios con el grado del numerador menor que el del denominador, por Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{x\to +\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Ahora, dado que un polinomio cualquiera se escribe como

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

vemos que

$$p(x)e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k e^{-x}$$

y utilizando Álgebra de Límites concluimos que

$$\lim_{x\to +\infty} p(x)e^{-x} = 0. \blacksquare$$