Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
24 de Junio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 14

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son $x = v_0 \cos(\alpha)\mathrm{t}$, $y = v_0 \operatorname{sen}(\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$, determinar la dirección del movimiento para los primeros 5 segundos, siendo $\alpha = 60$, $v_0 = 50\frac{m}{s}$, bosquejar.

Solución

Notemos que, para obtener la dirección del movimiento en cada punto pedido, necesitamos la pendiente de la recta tangente a la función en ellos. El problema es que la derivada que necesitamos para esto, es la de y con respecto a x, vale decir, $\frac{dy}{dx}$, pero sólo tenemos expresiones del estilo $x(t)$ e $y(t)$. Para solucionar esto, recordemos la regla de la cadena, que nos indica lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Teniendo esto en mente, calculemos las derivadas necesarias, y despejemos lo que buscamos:

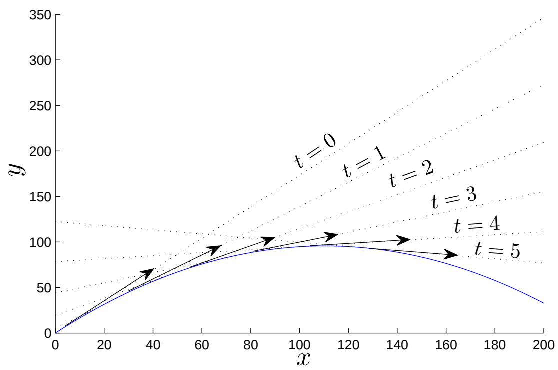
$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = v_0 \cos(\alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - gt.$$

En conclusión

$$v_0 \operatorname{sen}(\alpha) - gt = \frac{dy}{dx} \cdot v_0 \cos(\alpha) \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha) - \frac{gt}{v_0 \cos(\alpha)}.$$

Y con esta expresión, podemos encontrar la dirección en los primeros 5 segundos, lo que se expresa en la figura siguiente:



P2. En un triangulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Si consideramos que b, c son constantes y α variable, demostrar que $\frac{da}{d\alpha} = h_\alpha$, en que h_α es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interpretar el resultado geométrico de este resultado.

Solución

Calculemos $\frac{da}{d\alpha}$. Comencemos por aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}} \cdot \frac{d}{d\alpha}(b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha).$$

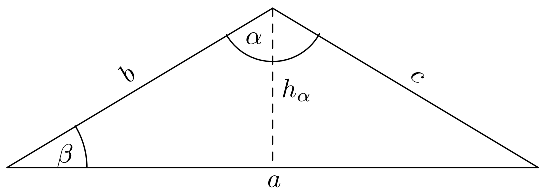
Directamente, observemos que

$$\frac{d}{d\alpha}(b^2+c^2-2bc\cos\alpha) = 2bc\operatorname{sen}\alpha.$$

Así, tenemos que

$$\frac{da}{d\alpha} = \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha}} = \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{a}.$$

Dibujemos la situación:



Notemos que, por Teorema del Seno se tiene

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{c} \iff \frac{c\operatorname{sen}\alpha}{a} = \operatorname{sen}\beta$$

pero además

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h_\alpha}{b} \implies \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{a} = h_\alpha.$$

En conclusión

$$\frac{da}{d\alpha} = h_\alpha.$$

P3. Derivar las siguientes funciones:

(a) $y = \operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right) + \cos\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)$

(b) $y = \sqrt[n]{\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}}$

(c) $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)$

Solución

(a) Por Álgebra de Derivadas, podemos calcular cada derivada por separado y luego sumarlas. Entonces:

- Notemos que podemos reescribir la expresión como sigue

$$\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right) = \operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)$$

y por regla de la cadena tenemos que

$$\left(\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right)\right)' = \left(\operatorname{sen}\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\right)' = \cos\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\cdot\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)'$$

y por regla de la cadena nuevamente

$$\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)' = e^{\cos(x)\ln(x)}\cdot(\cos(x)\ln(x))'.$$

Aplicando la regla del producto tenemos

$$(\cos(x)\ln(x))' = -\operatorname{sen}(x)\ln(x) + \cos(x)\cdot\frac{1}{x},$$

y juntando todo lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{sen}\left(x^{\cos(x)}\right)\right)' &= \cos\left(e^{\cos(x)\ln(x)}\right)\cdot e^{\cos(x)\ln(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\frac{1}{x}-\operatorname{sen}(x)\ln(x)\right)\\ &= \cos\left(x^{\cos(x)}\right)\cdot x^{\cos(x)}\cdot\left(\frac{\cos(x)}{x}-\operatorname{sen}(x)\ln(x)\right).\end{aligned}$$

- Análogamente

$$\left(\cos\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)\right)' = -\operatorname{sen}\left(x^{\operatorname{sen}(x)}\right)\cdot x^{\operatorname{sen}(x)}\cdot\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}+\cos(x)\ln(x)\right).$$

Luego, la derivada original se concluye sumando ambos resultados.

(b) Resolvamos esta derivada utilizando el operador logarítmico $\mathcal{L}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}\left[\sqrt[n]{\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}}\right]\\ &= \frac{1}{n}\mathcal{L}\left[\frac{x-\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}\right]\\ &= \frac{1}{n}\left(\mathcal{L}[x-\operatorname{tg}(x)]-\mathcal{L}[x+\sec(x)]\right).\end{aligned}$$

Y recordando que $\mathcal{L}[f]=\frac{f'}{f}$:

$$\mathcal{L}[y]=\frac{1}{n}\left(\frac{1-\sec^2(x)}{x-tg(x)}-\frac{1+\sec(x)\operatorname{tg}(x)}{x+\sec(x)}\right).$$

Luego, $y' = y\,\mathcal{L}[y]$.

(c) Por regla de la cadena

$$\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)^2}}\cdot\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)'.$$

Aplicando la regla del cuociente a la última expresion:

$$\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)' = \frac{3\cos(x)(4+5\cos(x))+15\operatorname{sen}^2(x)}{(4+5\cos(x))^2} = \frac{15+12\cos(x)}{(4+5\cos(x))^2}.$$

En conclusión, la derivada es

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3\operatorname{sen}(x)}{4+5\cos(x)}\right)^2}}\cdot\frac{15+12\cos(x)}{(4+5\cos(x))^2}.$$

P4. Considere la función dada por la regla

$$f(x)=\begin{cases} x^n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

(a) Pruebe que si $n\geq 1$ se cumple que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

(b) Pruebe que si $n>1$ entonces f es derivable en $x_0=0$, pero para $n=1$ no.

(c) Calcule $f'(x)$ para $x\neq 0$ y encuentre para qué valores de n se cumple $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.

Solución

(a) Calculemos directamente el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x^{n-1}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^{n-1}}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0,$$

donde la última igualdad se justifica por el límite conocido $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 0$, y dado que $n \geq 1$, $\frac{1}{u^{n-1}}$ converge (a 1 para $n = 1$, y a cero para los demás casos).
Con esto, el Álgebra de Límites, y el hecho de que $f(0) = 0$, nos permiten concluir, y queda demostrado lo pedido.

(b) Calculemos la derivada en $x_0 = 0$ por definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right).$$

Notemos que si $n = 1$, entonces tendremos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$$

que sabemos no existe.
Si $n > 1$ tendremos el caso conocido de nula por acotada, y entonces $f'(0) = 0$ (en particular, f es derivable en 0).

(c) Supongamos que $x \neq 0$ y $n > 1$, entonces por regla del producto tendremos que

$$f'(x) = \left(x^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = nx^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^n\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'.$$

Para calcular la derivada que queda, usamos la regla de la cadena:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

En conclusión:

$$f'(x) = nx^{n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por argumentos análogos a la parte anterior, el límite en 0 existirá ssi $n > 2$.

P5. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$e^{2\operatorname{arcsen}(yx)} = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

en el punto P donde la curva corta el eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).
Solución
En primer lugar, determinemos el punto P. Del enunciado ya sabemos que será de la forma $(x_0, 0)$. Podemos hayar x_0 imponiendo la condición $y = 0$ en la ecuación y despejando para x, es decir:

$$1 = \ln(1 + x_0^2) \iff 1 + x_0^2 = e \iff x_0 = \sqrt{e-1}.$$

Luego, P es $(\sqrt{e-1}, 0)$.

Para obtener la pendiente de la recta, en primera instancia deberíamos disponer de una ecuación explícita para $y(x)$. Como esto a priori no es posible, derivemos implicitamente a ambos lados.

- Lado izquierdo: Comencemos usando la regla de la cadena

$$\left(e^{2\operatorname{arcsen}(yx)}\right)' = e^{2\operatorname{arcsen}(yx)}\cdot(2\operatorname{arcsen}(yx))'.$$

Recordando que $(\operatorname{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y usando regla de la cadena nuevamente tenemos que

$$(2\operatorname{arcsen}(yx))' = \frac{2}{\sqrt{1-(yx)^2}}\cdot(yx)'$$

y por regla del producto tenemos que

$$(yx)' = y'x + y.$$

En resumen:

$$\left(e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}\right)' = \frac{2e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}}{\sqrt{1-y^2x^2}}(y'x+y).$$

- Lado Derecho: Usando la regla de la cadena

$$\left(\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right)' = \frac{1}{1+x^2+y^2}\cdot\left(1+x^2+y^2\right)'$$

y por álgebra de derivadas

$$(1+x^2+y^2)' = 0 + 2x + \left(y^2\right)'.$$

Nuevamente por regla de la cadena

$$\left(y^2\right)' = 2yy'$$

y en resumidas cuentas:

$$\left(\ln\left(1+x^2+y^2\right)\right)' = \frac{2x+2yy'}{1+x^2+y^2}.$$

Luego, juntando todo lo anterior

$$\frac{2e^{2\,\mathrm{arcsen}(yx)}}{\sqrt{1-y^2x^2}}(y'x+y) = \frac{2x+2yy'}{1+x^2+y^2}.$$

Como necesitamos y' cuando $y=0$, reemplazamos la condición para obtener que

$$2y'x = \frac{2x}{1+x^2}$$

puesto que $\mathrm{arcsen}(0) = 0$ y $e^0 = 1$.

Concluimos que

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

La ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

En nuestro caso, tenemos que $y_0 = 0$ y que $x_0 = \sqrt{e-1}$. Así, la recta tangente por el punto P a la curva es

$$\mathcal{L}:\ y = \frac{1}{e}\left(x - \sqrt{e-1}\right).$$

P6. Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + y\right) = \mathrm{sen}(yx)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje de las abscisas ($y = 0$), con abscisa positiva ($x > 0$).

Solución

En primer lugar, calculemos el valor de x en el punto que nos impone el problema. Para esto, reemplacemos $y = 0$, y notemos que

$$\ln\left(\frac{3}{4} + x^2 + 0\right) = \mathrm{sen}(0) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{3}{4} + x^2\right) = 0.$$

Luego, aplicando la función exponencial a la igualdad, tenemos

$$\frac{3}{4} + x^2 = e^0 = 1 \Longleftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Donde nos hemos quedado con la respuesta positiva, dadas las condiciones del problema. Ahora, para calcular la recta tangente, necesitamos y', por lo que procederemos tal como se hizo en **P5**, partiendo por derivar implícitamente ambos lados de la ecuación. Siendo así, comenzando por el lado izquierdo, tenemos que

$$\left(\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)\right)' = \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)' = \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot(2x+y')\,.$$

Ahora, derivando el lado derecho, tenemos

$$(\operatorname{sen}(yx))' = \cos(yx)\cdot(yx)' = \cos(yx)\cdot(y'x+y).$$

En este punto, reuniendo lo obtenido hasta ahora

$$\frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot(2x+y') = \cos(yx)\cdot(y'x+y).$$

Aquí, imponemos los valores de x e y encontrados recientemente ($x=\frac{1}{2}$ e $y=0$) y despejamos y':

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0}\cdot(1+y') = \cos(0)\cdot\left(y'\frac{1}{2}+0\right) &\iff \frac{1}{1}\cdot(1+y') = 1\cdot\left(\frac{y'}{2}\right)\\ &\iff 1+y' = \frac{y'}{2}\\ &\iff y' = -2\end{aligned}$$

Y tal como se hizo anteriormente, se concluye que la recta buscada es:

$$\mathcal{L}:\ y = -2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

P7. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)-f(y)|\leq a(x-y)^2$ para todo $x,y\in\mathbb{R}$ con $a>0$. Pruebe que $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ existe y $f'(x)=0$, para todo $x\in\mathbb{R}$.
Solución
Sea $x_0\in\mathbb{R}$. Notemos que escogiendo $x=x_0+h$ e $y=x_0$ tenemos que $|f(x_0+h)-f(x_0)|\leq ah^2$, es decir

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{h}\leq ah.$$

Tomando $h\to 0$, por Teorema del Sandwich concluimos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{|h|} = 0 = |f'(x_0)|$$

de donde se concluye el resultado.

P8. Determine un punto en que la curva $x^2+y^2=e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$, k constante, corta al semieje positivo OX y escriba las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en dicho punto.
Solución
Un punto $P(x,y)$ sobre la curva que cumpla las condiciones antes descritas deberá necesariamente tener $y=0$, es decir, será una solución de la ecuación $x^2=1$, y como buscamos una solución positiva, el punto que cumple esto es $(1,0)$. Teniendo esto, buscamos la recta tangente por el punto $(1,0)$. Para encontrar la pendiente, derivemos implicitamente la ecuación de la curva:

- Lado Izquierdo: Directo.
$$\left(x^2+y^2\right)' = 2x+2yy'.$$
- Lado Derecho: Usemos la regla de la cadena
$$\left(e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\right)' = e^{2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}\cdot\left(2k\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'.$$

Para esta derivada notemos que $2k$ es una constante y luego

$$\left(2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = 2k \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = 2k \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Para la derivada restante, por regla del cuociente tenemos

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

y en conclusión

$$\left(e^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}\right)' = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{x^2+y^2} \cdot (y'x - y).$$

En resumen, la derivación implicita resulta en

$$2x + 2yy' = \frac{2ke^{2k \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}}{x^2+y^2} \cdot (y'x - y)$$

e imponiendo las condiciones antes encontradas

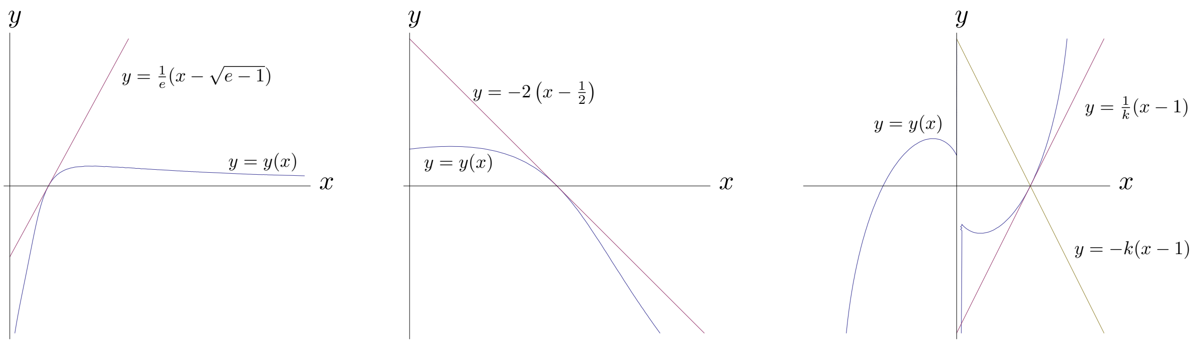
$$2 = 2k \cdot y' \iff y' = \frac{1}{k}.$$

Luego, la recta tangente a la curva por este punto es de ecuación

$$\mathcal{L}: \ y = \frac{1}{k}(x-1).$$

Y similarmente, la recta normal a la curva por este punto es

$$\mathcal{N}: \ y = -k(x-1).$$



(a) P5 (b) P6 (c) P8

: Graficos de las Rectas Tangentes :

P9. Considere las funciones siguientes definidas para todo $x > 0$: $f(x) = \sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$, $h(x) = 4c \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) - c \operatorname{sen}(cx) + d$. Encuentre los valores de las constantes a, b, c y d, sabiendo que f y g tienen la misma recta tangente en $x = 1$ y además que las rectas tangentes a f y h son perpendiculares en $x = 0$.
Nota. Dado que h no está definido en $x = 0$, considere su límite cuando x tiende a 0^+.

Solución
Tal como se ha hecho en problemas anteriores, necesitamos obtener las derivadas de cada función,

para así poder calcular sus respectivas rectas tangentes en los puntos que corresponda. Siendo así, comencemos por calcular las derivadas de todas las funciones propuestas.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2+x^3}{2+x}}} \cdot \left(\frac{2+x^3}{2+x}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2+x}{2+x^3}} \left(\frac{3x^2(2+x)-(2+x^3)}{(2+x)^2}\right) \\
g'(x) &= 3x^2 - 6x + a \\
h'(x) &= \frac{4c}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - c\cos(cx) \cdot (cx)' = \frac{-4c}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) - c^2\cos(cx) = \frac{-4c}{x^2+1} - c^2\cos(cx)
\end{aligned}$$

Ahora, impongamos las condiciones del enunciado. En primer lugar, nos dicen que las funciones f y g poseen la misma recta tangente en $x = 1$, luego, para que esta situación se tenga, tanto las funciones como sus derivadas deben ser iguales en este punto. Así, tenemos:

$$f(1) = g(1) \iff 1 = a + b - 2 \iff a + b = 3,$$

$$f'(1) = g'(1) \iff \frac{1}{3} = a - 3.$$

De donde despejando, se obtiene que $a = \frac{10}{3}$ y $b = -\frac{1}{3}$.

Para la segunda condición del problema, primero sigamos la indicación del problema, calculando el límite pedido:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} 4c \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - c\operatorname{sen}(cx) + d = \lim_{u\to +\infty} 4c\operatorname{arctg}(u) - c\operatorname{sen}\left(\frac{c}{u}\right) + d = 4c\frac{\pi}{2} + d = 2\pi c + d,$$

donde se aplicó un resultado conocido para $\operatorname{sen}(x)$, y uno probado en los problemas de la Semana 13 para $\operatorname{arctg}(x)$.

Ahora, nuevamente debemos imponer que las funciones sean iguales en el punto indicado, pero ahora la condición para las derivadas es $f'(0) \cdot h'(0) = -1$. Siendo así, tenemos:

$$f(0) = h(0) \iff 1 = 2\pi c + d,$$

$$f'(0) \cdot h'(0) = -1 \iff -\frac{1}{4} \cdot (-4c - c^2) = -1.$$

Y despejando tal como antes, se obtienen los valores $c = -2$, y $d = 4\pi + 1$.