Así:

$$(1+\cos(\alpha)+i\,\text{sen}(\alpha))^n = \left[2\cos\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}\right]^n$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{in\alpha}{2}}$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)\right]$$
$$= 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)+i\cdot 2^n\cos^n\,\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right).$$

Por igualdad de complejos, si $W=a+bi$, $z=c+di$ y $W=z$, entonces $\begin{matrix} a=c \\ b=d.\end{matrix}$

Sigue que
$$S = 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)$$
$$S' = 2^n\cos^n\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\text{sen}\left(\tfrac{n\alpha}{2}\right)_{//}$$

[Cálculo] Límites de funciones.

$\boxed{\text{P1}}$

ⓐ ¿Existen estos límites?

generamos el $\frac{1}{x}$ para el límite conocido

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+3x+1\right)\cdot\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}+3x+1\right)\text{sen}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\tfrac{1}{x^2}+1}+3+\tfrac{1}{x}\right)\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$
$\longrightarrow 3$ $\qquad\longrightarrow 1$
$$= 3\cdot 1$$
$$= 4_{//}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(5x)-\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}5\cdot\frac{\text{sen}(5x)}{5x} - \lim_{x\to 0}3\cdot\frac{\text{sen}(3x)}{3x}$$
se forma el límite conocido!
$$= 5\cdot 1 - 3\cdot 1$$
$$= 2.$$

3) $$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}}$$ Tenemos 2 formas.

① Definición de $\ln(x)$.

$$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln(x)}} = \lim_{x\to 1}\exp\left(\ln\left(x^{-\frac{x}{\ln(x)}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\exp\left(-\frac{x}{\cancel{\ln(x)}}\cdot\cancel{\ln(x)}\right)$$
$$\overset{\ln(x)\neq 0}{=} \lim_{x\to 1}\exp(-x)$$
$$= e^{-1}.$$

(2) Notemos que

$$\ln\left(x^{-\frac{x}{\ln(x)}}\right) = -\frac{x}{\cancel{\ln(x)}}\cancel{\ln(x)} = -x$$

Luego

$$y = \lim_{x\to1} \ln\left(x^{\frac{-x}{\ln(x)}}\right) = \lim_{x\to1} -x = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1} x^{\frac{-x}{\ln(x)}} = \exp\left(\lim_{x\to1} \ln\left(x^{\frac{-x}{\ln(x)}}\right)\right) = e^{-1}$$

4) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a}$

Sea $\alpha = \operatorname{arcsen}(a)$

Usando el C.V. $u = \operatorname{arcsen}(x) - \alpha$

$\Rightarrow \operatorname{arcsen}(x) = u + \alpha$

$\Rightarrow x = \operatorname{sen}(u+\alpha)$

Como $x \to a$, $u \to 0$. luego.

$$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{u\to0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u+\alpha) - a}$$

$$= \lim_{u\to0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u)\cos(\alpha) + \cos(u)\operatorname{sen}(\alpha) - a}$$

Pero $\alpha = \operatorname{arcsen}(a)$

$\rightarrow a = \operatorname{sen}(\alpha)$

$$= \lim_{u\to0} \frac{1}{\cos(\alpha)\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}\right)}_{\to 1} + a\cdot\Big[\underbrace{\frac{\cos(u)-1}{u}}_{\to 0}\Big]}$$

$$= \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$= \sec(\alpha)$$

$$= \sec(\operatorname{arcsen}(a))$$

O... como $\cos(\alpha) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)} = \sqrt{1-a^2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\operatorname{arcsen}(x)-\operatorname{arcsen}(a)}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

5) $$\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{e^{x^2}-1}.$$

Notemos que $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$ y con $h = x^2$: $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{h\to0} \frac{h}{e^h-1} = 1$

luego, $$\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{1+x^2}\right]$

Notemos que para $|x|<1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1$

$$\Rightarrow 1 < 1+x^2 < 2$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+x^2} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 > \left[\frac{2}{1+x^2}\right] > 1$$

Con lo que $\left[\dfrac{2}{1+x^2}\right] = 1 \quad \forall x \in (-1,0)\cup(0,1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{1+x^2}\right] = 1.$$

(b) ¿Qué valor(es) de k hace(n) que este límite sea finito y no nulo?

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2}+x^2-1)(\cos(x)-1)}{x^k} = \circledast$$

Reconstruimos la expresión, pensando en el límite conocido del coseno.

$$\circledast = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}+x^2-1}{x^{k-2}} \cdot \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

En donde $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Por otro lado: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}+x^2-1}{x^{k-2}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^{k-2}} + \dfrac{x^2}{x^{k-2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^{k-2}} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^{k-2}}$.

Para formar el límite conocido de la exponencial, necesariamente $x^{k-2} = x^2 \Rightarrow k-2=2 \Rightarrow \boxed{k=4}$

Y así $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2} = 1 + 1 = 2$.

Finalmente $\circledast = 2\cdot -\dfrac{1}{2} = -1$.

P2) Definimos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\,\text{sen}(x) - x\,b\cos(x)}{x} & \text{si } x<0 \\ c & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\text{tg}(b\,\text{sen}(x))}{x} & \text{si } 0<x<\pi \\ d & \text{si } x=\pi \\ \dfrac{1}{x-\pi}\left[\sqrt{(x-\pi)^2+1} - \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}\right] & \text{si } x>\pi \end{cases}$$

=8=

Recordemos que f es continua en x_0 si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y es igual a $f(x_0)$. ¿Qué valores de a, b, c, d permiten lo anterior?

$[x\to 0^-]$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\,\text{sen}(x) - xb\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{a\,\text{sen}(x)}{x}}_{a\cdot 1} - \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\cancel{x}b\cos(x)}{\cancel{x}}}_{b\cdot 1} = a - b$

$[x\to 0^+]$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{tg}(b\,\text{sen}(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(b\,\text{sen}(x))}{x\cos(b\,\text{sen}(x))} \cdot \frac{b\,\text{sen}(x)}{b\,\text{sen}(x)}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(b\,\text{sen}(x))}{b\,\text{sen}(x)} \cdot \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{b}{\cos(b\,\text{sen}(x))}$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{b}{\cos(0)}$

$= b.$

$[x\to \pi^-]$ $\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\text{tg}(b\,\text{sen}(x))}{x} = \frac{\text{tg}(0)}{\pi} = 0.$

$[x\to\pi^+]$ $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{(x-\pi)^2+1} - \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}{x-\pi} \cdot \frac{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}}$

$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{(x-\pi)^2 + \cancel{1} - (a+1)(x-\pi) - \cancel{1}}{(x-\pi)\left[\sqrt{(x-\pi)^2+1} + \sqrt{(a+1)(x-\pi)+1}\right]}$

$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cancel{(x-\pi)}\left[(\cancel{x-\pi}) - (a+1)\right]}{\cancel{(x-\pi)}\left[\sqrt{(\cancel{x-\pi})^2+1} + \sqrt{(a+1)(\cancel{x-\pi})+1}\right]}$

$= \frac{-(a+1)}{2}.$

Finalmente:

- f es continua en 0 si $a - b = c = b.$
- f es continua en π si $0 = d = \frac{-(a+1)}{2}.$ $\Rightarrow \boxed{d=0}$ $\Rightarrow \boxed{a=-1}$ $\Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow \boxed{c=-\frac{1}{2}}$

P3

ⓐ f satisface $\exists L>0,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$

demostremos que $\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Podemos comparar x con x_0, acorde a la definición ε–δ de límite de funciones, que nos dice que

$$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$
$$(|x - x_0| \leq \delta)$$

Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ tal que $|x - x_0| \leq \delta \iff |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{L}$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0|$$
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{L} \leq \varepsilon$$

Usamos $f(x_0)$ como $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$! Luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

¿Qué ocurre con $f(x) = x$? Tomemos $L = 1$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \underset{(=)}{\leq} 1 \cdot |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

¿Qué ocurre con $f(x) = x^2$? Supongamos que $\exists L > 0$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Con $x_1 = L + 1$ y $x_2 = 0$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(L+1)^2| = L^2 + 2L + 1 > L^2 + L = L(L+1) = L|x_1 - x_2|.$$

Lo que es una contradicción.

(b) Se cumple:

① $\lim_{x \to 0} g(x) = 1^+ \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}\quad g(x) \in (1, 1+\varepsilon]$

② $\lim_{u \to 1^+} f(u) = +\infty \iff \forall M > 0\ \exists \bar{\delta} > 0\ \forall u \in (1, 1+\bar{\delta}]\quad f(u) \geq M$

Queremos demostrar que $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$, es decir,

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\} \quad (f \circ g)(x) \geq M$$

Sea $M > 0$.

- Por ② existe $\bar{\delta} > 0$ tal que $f(u) \geq M$.
- Según ①, podemos tomar $\varepsilon = \bar{\delta}$ para el cual $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\} \quad \underbrace{g(x)}_{u} \in (1, 1+\varepsilon] \Rightarrow f(g(x)) \geq M$$

Se cumple así que $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x) = +\infty$.

(c) Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Probemos que $\lim_{x \to 0} g(x)$ NO existe. Para ello, debemos tomar $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ tal que $g(x_n) \to l_1$, $g(y_n) \to l_2$ y $l_1 \neq l_2$.

=⑩=

Sea $X_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $X_n \to 0$ y $g(X_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Sea $Y_n = \frac{\sqrt{a}}{n} \in \mathbb{I}$ con $a \neq k^2$, $k \in \mathbb{N}$. $\left(\text{ej } \frac{\sqrt{2}}{n}.\right)$ tal que $Y_n \to 0$ y $g(Y_n) = 1 \quad \forall n \in$

Pero $g(X_n) \neq g(Y_n)$. luego NO existe $\lim_{x \to 0} g(x)$

$\boxed{\text{P4}}$ Sea $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1}$ y buscamos su asíntota oblicua $y = mx + n$ con

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad y \quad n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx.$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} = 1.$$

$$n = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{x-1} - x = \lim_{x \to \infty} x \left[x^{-\frac{1}{3}} \sqrt[3]{x-1} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \left[\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^{\frac{1}{3}}} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \left[\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} - 1 \right] = \circledast$$

El problema se puede aplicar usando L'Hôpital... pero no pueden usarlo acá!!
Sin embargo, hay una herramienta adicional. Hay una raíz cúbica! lo que nos sugiere:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Sea $a = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}$ y $b = 1$. Así:

$$\underbrace{\left(\frac{x-1}{x} - 1\right)}_{\frac{x-1-x}{x}} = \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} - 1\right) \left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1 \right)$$

luego:

$$\circledast = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x} \cdot -\frac{1}{\cancel{x}}}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}} + 1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} - \frac{1}{\left(1 - \cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{1 - \cancel{\frac{1}{x}}} + 1} = -\frac{1}{3}.$$

Dado que $m = 1$ y $n = -\frac{1}{3}$ la asíntota pedida es

$$y = x - \frac{1}{3}.$$

MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11:Más sucesos entre Sándwich y límites $e^x \wedge \ln x$

06 de Junio de 2019

P1. ***[Calcular límite]*** Calcule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

P2. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites, si es que existen

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n}\right)}$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b}{a^n - n}$ En los casos $a \in (0,1) \wedge a > 1$

P3. ***[Recordemos convergencia]***

Demuestre usando la definición de convergencia.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$

P4. ***[Constante Euler-Mascheroni]BRÍGIDO***

Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 11:Más sucesos entre Sándwich y límites $e^x \wedge \ln x$

06 de Junio de 2019

P1. ***[Calcular límite]*** Calcule.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

P2. ***[Calcular Límites]*** Calcular los siguientes límites, si es que existen

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln\left(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n}\right)$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n}\right)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b}{a^n - n}$ En los casos $a \in (0,1) \wedge a > 1$

P3. ***[Recordemos convergencia]***
Demuestre usando la definición de convergencia.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - (-1)^n} = 0$

P4. ***[Constante Euler-Mascheroni]BRÍGIDO***
Demuestre que $X_n = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$ son convergentes y que tienen igual límite.

P5. ***[Su sesión de Sucesión a mil]***
Considere (S_n) definida por:

$$S_n = \left(\frac{an+1}{2n}\right)^n \text{ con } a \in (0,\infty) \text{ fijo}$$

a) Demuestre que si $0 < a < 2, S_n$ converge y calcule su límite.

b) Demuestre que si $a > 2, S_n$ no es acotada ni convergente.

c) Estudie el límite de S_n cuando a=2, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$

d) Estudie el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\left(\frac{an+1}{2n}\right)^n}$$

P6. *[Función acotada*
Sea $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, una función tal que

$$1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1, \forall x > 0$$

a) Demuestre que dada una sucesión (u_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(1)$$

.

b) Si además se sabe que $u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$ calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(u_n)}{u_n - 1}$$

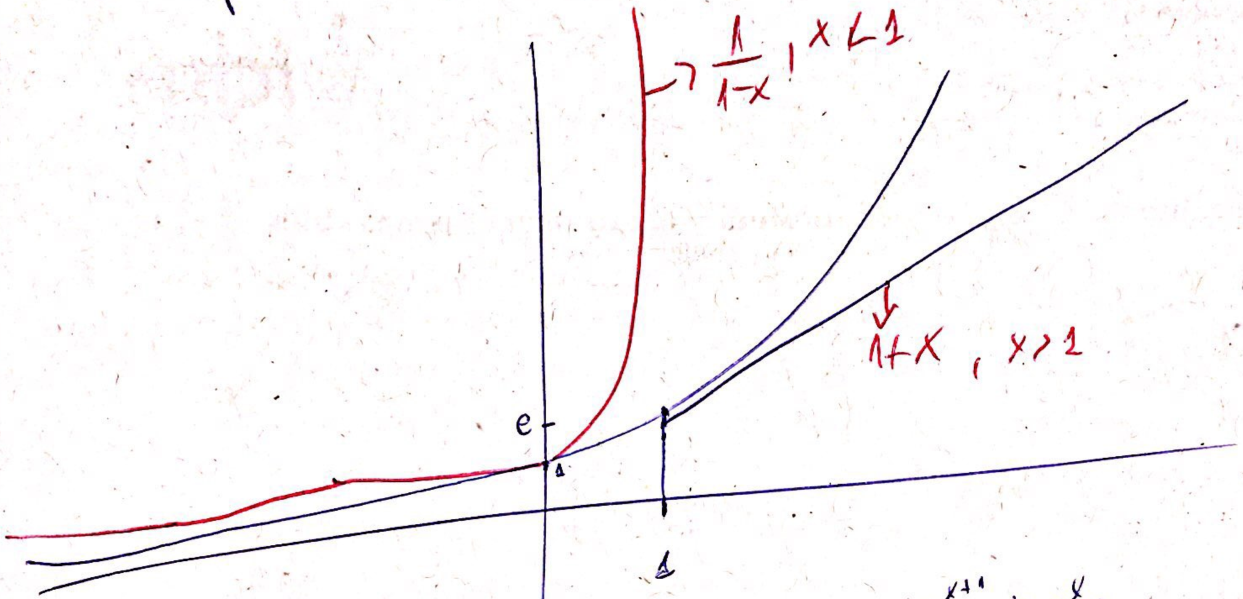
P7. Considere que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$u_n = \frac{n^n}{n! \cdot e^n}$$

a) Calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ y deduzca si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente

b) Demuestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Exp

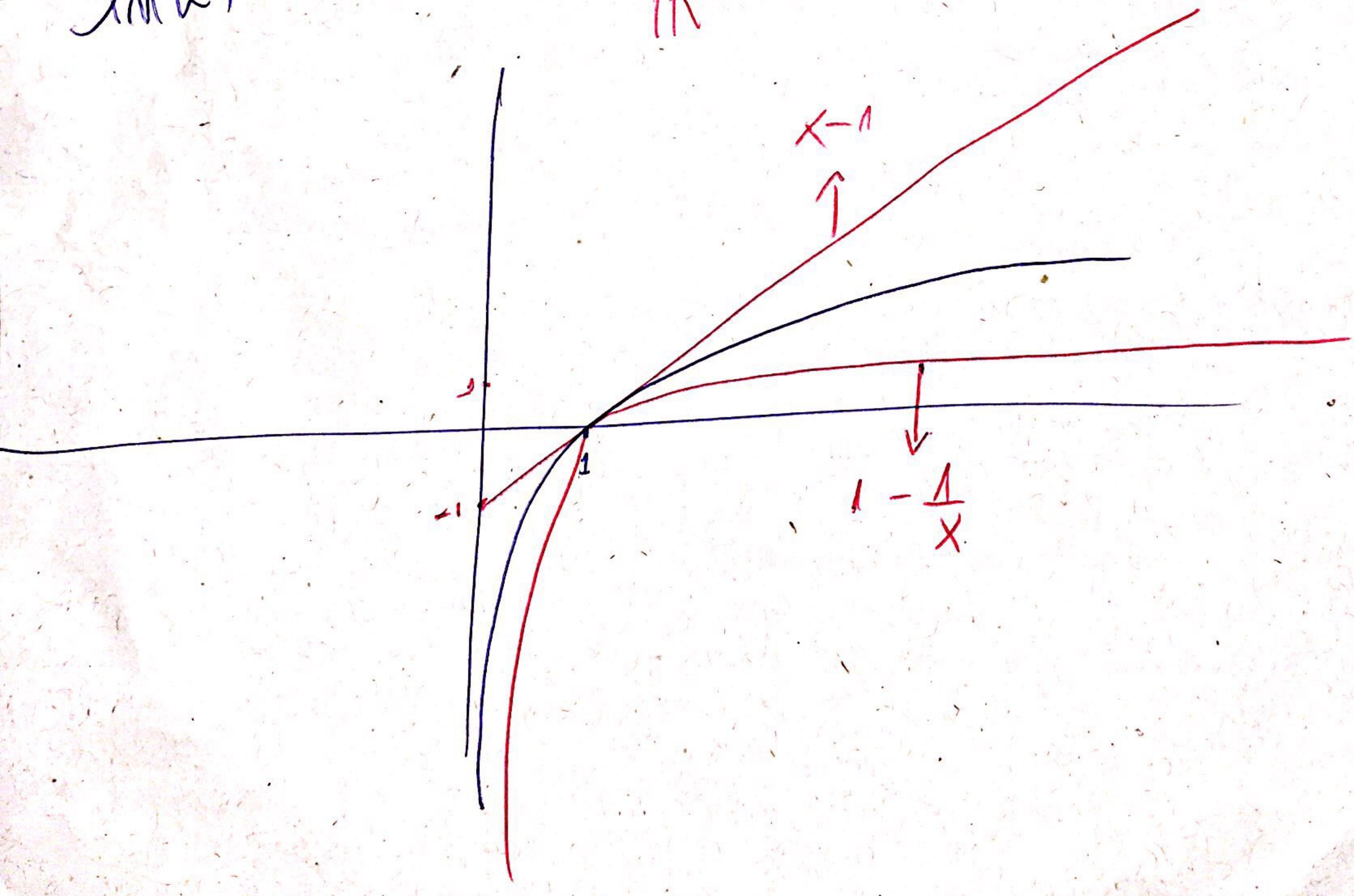


$e^x \leq e^{x+1} \leq e^x e$

$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}$

$\mathbb{R}^+$

ln(x)



Teorema Bernoulli I.

I) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > -1)\ (1+h)^n \geq 1 + nh.$

Sucesión Importante

q^n, 1) $\lim q^n = 1$, si $q = 1$

2) $\lim q^n = 0$, si $|q| < 1$

3) $\lim q^n$ no existe si $q \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$\sqrt[n]{a}$, $a \in (0, \infty)$

$\sqrt[n]{a} \to 1$, $\forall a \in (0, \infty)$.

Bernoulli II

II) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall h > 0)\ (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$

$\sqrt[n]{n} \to 0$

III $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in (-1, \frac{1}{n}))$, $(1+u)^n \leq \frac{1}{1 - nu}$

Teorema S.

Def: Sea (s_n), si $\forall n \geq n_0$ $s_{n+1} \geq s_n$ creciente.

- Sea (S_m), Si $\forall m \geq m_0$, $S_{m+1} \leq S_m$ decreciente.

TSM

Si (S_m) es sucesión (estrictamente) creciente o decreciente a partir de un m_0 y acotada superiormente o inferiormente respectivamente, entonces converge.

Límite conocido 1) $e = \lim \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$

Teorema $\forall x \in \mathbb{R}$ la sucesión

$$S_m := \left(1+\frac{x}{m}\right)^m \text{ converge.}$$

La fución exponencial:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$

$\forall x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ Very Important.

$$\Rightarrow \boxed{1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \forall x\ x<1}$$

La función logaritmo:

$\forall x \in (0, \infty)$ $1-\frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$

- Para $a > 0$

$$a^x = e^{(x \ln(a))}.$$

$\log_a x = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

exponencial y su continuidad.

$$\lim e^{a_n} \to e^a$$

$\lim \left(\dfrac{e^{a_n} - e^a}{a_n - a} \right) \to e^a$

- Versión log.

1) $\lim \ln(a_n) \to \ln a$

2) $\left(\dfrac{\ln(a_n) - \ln(a)}{a_n - a} \right) \to \dfrac{1}{a}$

P1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

notamos

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \ln(k+1) - \ln(k)$$

$$\Rightarrow \lim \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)\right]$$

telescópica! #intuición

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln(3)} - \cancel{\ln(2)} + \dots + \cancel{\ln(n)} + \cancel{\ln(n-1)} + \ln(n+1) - \cancel{\ln(n)}\right]$$

$$= \lim \frac{1}{n}\left[\ln(n+1) - \ln(1)\right] = \lim \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\frac{n+1}{1}\right)$$
$$= \lim \ln\left(\sqrt[n]{n+1}\right) \overset{\text{Álgebra}}{=} \ln\left(\lim \sqrt[n]{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow = \ln(1) = 0 \,//$$

i) $\underbrace{\lim \frac{1}{n} \ln\left(e^{n} + e^{2n} + e^{3n} + 1\right)}$

Esta expresión llamada $\blacktriangledown$

Recordemos que ln es creciente, Así que si quito o sumo positivos ocurre lo usual !!! :)

$$\frac{1}{n}\ln|e^{3n}| \quad \blacktriangledown \quad \le \frac{1}{n}\ln|4e^{3n}|$$

$$= \frac{3n}{n} \qquad\qquad = \frac{1}{n}\left[(\ln 4) + \ln(e^{3n})\right]$$

$$= 3 \qquad\qquad = \frac{\ln(4)}{n} + 3$$

constante.

Al aplicar límite

$$3 \le \lim \blacktriangledown \le \cancel{\lim \frac{\ln(4)}{n}}^{\,0} + 3$$

Por Teorema Sándwich.

ii) $X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

Es del tipo $(q_n)^n$, entonces

estudiemos $\lim q_n = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$

Entonces

$$X_n = \left(\frac{n+2}{2n} \right)^n \longrightarrow 0$$

iii) $y_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right)^{1/n}$

Es del tipo $\sqrt[n]{a_n}$

y por ii $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad y_n \longrightarrow 1$

iv) $\lim \frac{a^n + b}{a^n - n}$

Si $a \in (0,1) = a^n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} = \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{\,0} + \cancel{\frac{b}{n}}^{\,0}}{\cancel{\frac{a^n}{n}}^{\,0} - 1} = \frac{0}{1} = 0$$

Recordando que $a_n \in (0,1)$ al elevarlo lo voy disminuyendo cada vez más.

Si $a > 1$

$$1 > \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim \frac{1 + \frac{b}{a^n}}{1 - \frac{n}{a^n}}$$

$$= \lim \frac{1 + \left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot b}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^n n}$$

Al igual que el caso anterior, recordamos q^n, si $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{1 + \cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n b} \to 0}{1 - \underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n \cdot n}}_{|q|^n \cdot n^k} \to 0} = \frac{1}{1} = 1$$

$|q|^n \cdot n^k$ Apunte, gana exponencial

P3) Demuestre usando convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

Definición de convergencia

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left|\frac{1}{n-(-1)^n} - 0\right| < \varepsilon$

Para poder ver todos los casos, tenemos que ver a través de la paridad, Por lo que

Si n par $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k}} = \frac{1}{n-\underbrace{\left((-1)^2\right)^k}_{1}}$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

Si n Impar $n = 2k'-1$, $k' \in \mathbb{N}$

$$\alpha \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k'-1}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right|$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right|$$

Si fuera par

$$\left| \frac{1}{n-1} \right| \geq 0, \ \forall n \in \{1, 2 \ldots\}$$

$$n \geq 1$$

$$\frac{1}{n-1} \geq \quad \forall n \geq 1$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right| < \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n-1$$

$$\frac{1}{\varepsilon} + 1 < n,$$

Luego para converger basta $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor + 1$

$\forall n \geq n_0$ converge, pues $\left| \frac{1}{1-(-1)^n} - 0 \right| < \varepsilon$.

Veamos

X_n y su crecimiento, como bien recordamos se realiza a través de la diferencia entre 2 términos consecutivos de la sucesión

$$X_{n+1} - X_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \cancel{\frac{1}{n+1} + \ln}$$

Sabemos que si $x > 0$

$$\Rightarrow \ln(x) \leq x - 1$$

$$\frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1$$

$$= \frac{1 + n - n - 1}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ $X_{n+1} - X_n \leq 0$, X_n decreciente.

Scanned with CamScanner

Veamos si está acotada

$$X_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \ln(m)$$

Por desigualdad del log

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \cancel{1} + \frac{1}{k} - \cancel{1}$$

$$= \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$$

Entonces $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}, \quad \forall k \geq 1$ sumamos hasta $m-1$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}$$

$$(\Downarrow)$$

$$\Downarrow \quad \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln k+1 - \ln k$$

$$= \cancel{\ln(2)} - \ln(1) + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln(2)} + \dots \cancel{\ln m-1} - \cancel{\ln m-2} + \ln m - \cancel{\ln m-1}$$

$$= -\overset{0}{\cancel{\ln(1)}} + \ln(m) = \ln(m).$$

$$\Rightarrow \ln(n) \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$0 \le \frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = x_n$$

$0 \le x_n$ Es ACOTADA!

Entonces por TSM converge. (Este límite le llaman de Euler Mascheloni

Veamos $(y_n) = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$y_n \le x_n$ / lim

$\lim y_n \le \gamma$ es acotada.

Veamos crecimiento

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - \frac{1}{n+1} - x_n + \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \frac{1}{n}$$

$$= \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+1}} \underline{- \ln(n+1)} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + \underline{\ln(n)} + \underline{\frac{1}{n}}$$

$$= \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{n+1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad / + \frac{1}{n}$$

$$1 - 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n} = y_{n+1} - y_n$$

Como es creciente es acotada superiormente y por TSM converge

Luego $y_n = x_n - \frac{1}{n}$ / lim

$$\lim y_n = \lim x_n - \cancel{\lim \frac{1}{n}}^{\to 0}$$

$$\lim y_n = \lim x_n$$

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl

MA1001-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón.
Consultas:pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 12

12 de Junio de 2019

P1. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2+2}{\cos(\pi x)}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^k}$ con $k = 1, 2$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2}$

e) $\lim_{x\to -2} \frac{x(|x-3|-5)}{x^2-4}$

P2. Usando cambio de variables, calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)}-1}$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2}$

e) $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan(\frac{\pi}{2}x)$

P3. Usando límites laterales calcule el siguiente límitie si es que existe:

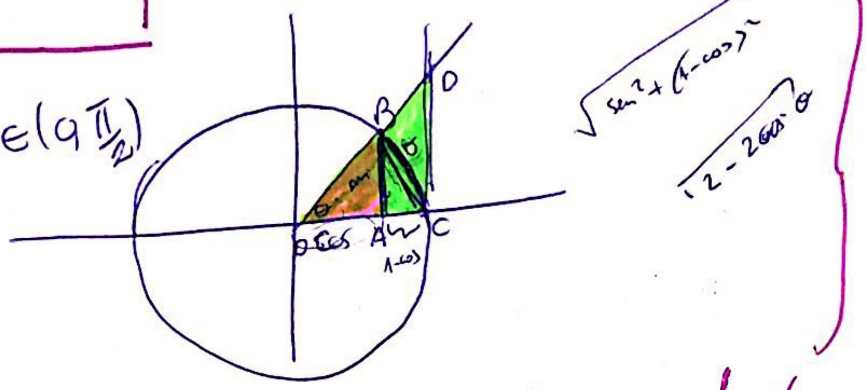
$$\lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen} x| - |x|}{x}$$

Demostremos por Teorema del Sándwich

límite fundamental del sen(x)!!

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

Sea $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



Veamos una visión geométrica

$\acute{A}\triangle OAB \leq \acute{A}\triangleleft OCB \leq \acute{A}\triangle OCD$ | $\acute{A}(\text{Algo})$ = Área algo

- la desigualdad no cambia, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{tg(x)}{2} \quad / \cdot 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \ \operatorname{sen}\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta} \quad /()^{-1}, \ \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \cos\theta \quad / \text{Aplicando } \lim_{\theta\to 0} \text{ límite}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\cos\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta\to 0} \cos\theta$$

$\downarrow$ 1 $\qquad\qquad$ $\downarrow$ 1

$\Rightarrow$ Por TEOREMA Sándwich $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

$f(x) = -f(-x)$

Pero sabemos que sen θ es Impar, en conjunto a θ, entonces $f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{-\operatorname{sen}(-\theta)}{-(-\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = f(-\theta)$

$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = f(\theta)$ es par, simétrica

$\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ $\boxed{//}$

1) Evaluar y ver si es indeterminación
2) Álgebra límites y con conocidos llegar al límite

P1) a) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2+2}{\cos(\pi x)}$ lo primero que debemos hacer, es evaluar, pues

en este caso por alg. de límites, no hay indeterminación

1) no ocurre por lo que solo reemplazo

$= \frac{5^2+2}{\cos(5\pi)} = \frac{27}{-1} = -27$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}$, si evalúo

1) Es $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} \cdot \underbrace{\frac{(x+\sqrt{x+2})}{(x+\sqrt{x+2})}}_{1}$$

2)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} \quad , x \neq 2 \to \text{condiciono } x \neq 2$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2+\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \;/\!/$$

} realizo el límite $\to 2$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k}$, $k \in \{1, 2\}$

$\underline{k=1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1$$

/ límite conocido Pag 199 Apunte

$$= 1 - 1 = 0 \;/\!/$$

$k=2$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}$. Lo haremos por teo Sandwich.

Scanned with CamScanner

Por introducción pág 11, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\bar{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

de  $\quad \text{sen}(x)\cos(x) \le x \le \text{tg}(x) \quad / \cdot(-1)$

$\iff -\text{tg}(x) \le -x \le -\text{sen}(x)\cos(x) \quad / + \text{sen}(x)$

$\iff \text{sen}(x) - \text{tg}(x) \le \text{sen}(x) - x \le \text{sen}(x) - \text{sen}(x)\cos(x) \quad / \cdot \frac{1}{x^2}, \; x \neq 0$

$$\iff \frac{\text{sen}(x) - \text{tg}(x)}{x^2} \le \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(x)\cos(x)}{x^2}$$

/ factorizo $\leftarrow$ sen(x) $\rightarrow$ sen(x)

$$\iff \frac{\text{sen}(x)\left[1 - \frac{1}{\cos(x)}\right]}{x^2} \le \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\text{sen}(x)}{x}\,\frac{[1 - \cos(x)]}{x}$$

/ sumo $\leftarrow$

$$\iff \frac{\text{sen}(x)}{x}\left[\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)\, x}\right] \le \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\text{sen}(x)}{x}\,\frac{[1 - \cos(x)]}{x}$$

/ factorizo (−1) $\leftarrow$

Paso anterior

$$\iff \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}(-)\left[\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)\, x}\right] \le \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} \le \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}\,\frac{[1 - \cos(x)]}{x}$$

/ $\lim_{x\to 0}$

Recordemos $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$\cos(0) = 1$

$\lim_{u\to 1} \frac{\ln u}{u - 1} = 1$

$\lim_{u\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Sándwich de sandía.

tomando límite $x \to 0$

$$\iff 1 \cdot (-1) \cdot \frac{0}{1} \le \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} \le 1 \cdot 0 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x) - x}{x^2} = 0.$$

//

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2}$, la función está mal definida para $x \in [0,1)$

Notar que si $x \in [0,1)$ no está definido

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} \Rightarrow x \in [-1,0)$$

$$= \cancel{\lim_{x\to 0}} \frac{1-\cos(-1)}{1} = 1-\cos(-1)$$

Lo que ocurre acá es que como está indefinido para $x \to 0^+$, es decir $x \in [0,1)$, no tenemos límites laterales iguales, pero para poder dar una expresión calculamos el límite por izquierda!

Scanned with CamScanner

e) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x(|x-3|-5)}{x^2-4}$

1) Evaluamos

$$\frac{2(|-2-3|-5)}{4-4} = 2 \cdot \frac{0}{0}$$

2) Notemos que $|x-3|$ cambia su comportamiento según donde partemos de x

si $x \in (3, \infty^+) \Rightarrow |x-3| = x-3$

si $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow |x-3| = 3-x$

- Como estamos tomando límite $x \to -2$ podemos tomar una vecindad, mientras contenga -2!

- tomamos (como es debido) $x \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$ una vecindad de -2, $\varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon = 2$.

Arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow x \in (-4, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x(|x-3|-5)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x(3-x-5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{-x\cancel{(x+2)}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-x}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} //$$

Scanned with CamScanner

Propuesto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k} \quad , k \in \{1, 2, 3, \text{———} n\}$$

De qué depende?

El que me muestre desarrollo ~~antes~~ se ganará un dulce, Hasta agotar stock!

9) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \underbrace{\frac{x^2\pi^2}{x^2\pi^2}}_{1}$ C.V.

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1} \cdot x^2 \cdot \pi^2$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]} \cdot \pi^2$

♡ luego $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2}$ | si $u = \pi x$ cuando $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$ || justificación importante

$\Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$ } límite conocido

★ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$ | si $v = x^2$ cuando $x \to 0 \Rightarrow v \to 0$ ||

$\Rightarrow \lim_{v\to 0} \frac{\operatorname{sen}(v)}{v} = 1$ } límite conocido

Entonces nuestro límite final queda como

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right]} \pi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[1]} \cdot \pi^2 = \frac{\pi^2}{2}$ //

Scanned with CamScanner

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot \underbrace{\dfrac{[(3-x)-1]}{[(3-x)-1]}}_{1}$

Por qué? quería formar $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1}$ conocido

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{2-x}{(e^{2(x-2)}-1)} \cdot \dfrac{2}{2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{2(x-2)}{e^{2(x-2)}-1} \cdot -\dfrac{1}{2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} \cdot \dfrac{1}{\left[\dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)}\right]} \cdot -\dfrac{1}{2}$

Sea $u = 3-x$, $x \to 2$
$\Rightarrow u \to 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{[(3-x)-1]} = \lim\limits_{u \to 1} \dfrac{\ln(u)}{u-1} = 1$

Sea $w = 2(x-2)$, $x \to 2$
$w \to 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{2(x-2)}-1}{2(x-2)} = \lim\limits_{w \to 0} \dfrac{e^{w}-1}{w} = 1$

$= \dfrac{0}{0} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Scanned with CamScanner

c) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$

1) Evaluar $\Rightarrow 1^{1/0}$

2) Matraca

\# Propiedad consistencia. $e^{\ln(a^n)} = a^n$; siempre que e^x y $\ln(x)$ estén bien definidas.

$$\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\ln\left(\cos(x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \ln(\cos(x))\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \exp\left[\frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos^2(x)}\right]$$

Luego $h = \cos(x)$, si $x \to 0$
$h \to 1$

$$= \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{1-h^2}\right] = \lim_{h\to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{-(h-1)(1+h)}\right]$$

Por continuidad de e^x y $\ln(x)$ puede entrar el límite, además de alg de límites

$$= \exp\left[\lim_{h\to 1}\frac{\ln(h)}{h-1} \cdot \frac{-1}{1+h}\right] = \exp\left[1 \cdot \frac{-1}{1+1}\right] = e^{-\frac{1}{2}} //$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\left[e^{x-x^2} - 1\right]}{x - x^2}$

$u = x - x^2$, $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u}$

$\Rightarrow \quad = e^{0^2} \cdot 1 = 1$ //

e) $\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 1

$= \lim_{x\to 1} (1-x) \frac{sen\, \frac{\pi}{2}x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

veamos si $w = 1 - x$

$x \to 1 \Rightarrow w \to 0$ $\quad \frac{\pi}{2}x = (1-w)\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - w\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{1}{\left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}\right]} \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

$V = \frac{\pi}{2}w$, $w \to 0 \Rightarrow V \to 0$

2 $= \lim_{V\to 0} \frac{1}{\frac{sen(V)}{V}} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \cdot \frac{2}{\pi}$

3 Luego junto todo

$\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \underset{\substack{x\to 1 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{1}$

Recoerdo lo más importante para el cambio de variable es que una vez que hacem esto no puede quedar com la variable anterior, y tender todo al mismo tiempo.

P3) a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$

Veamos que podemos estudiar la vecindad $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

b) $\lim_{x \to 0^-} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$

Veamos que podemos estudiar $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{-\text{sen}(x) + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right] + \frac{x}{x} = -1 + 1 = 0$$

Como limites laterales son iguales el limite Existe y vale 0.

Terminamos!! Recuerden postear sus dudas o preguntarme por algún medio.
pgamez@dim.uchile.cl.

Scanned with CamScanner

P1) MA1001 - 2012 (P1 b)

Demuestre usando la definición.

I) $\lim_{x \to \infty} x^3 = +\infty$

Recordemos $\forall M > 0, \exists m > 0, \forall x \geq m, f(x) = x^3 \geq M$

Lo que no entrego

$f(x) = x^3 \leq M \quad / \sqrt[3]{\ }$

$\Rightarrow \quad x \leq \sqrt[3]{M} \rightarrow$ relación directa con x

$\Rightarrow$ si $\quad m = \sqrt[3]{M}$

Lo que entrego

En efecto dado la definición basta tomar $\underbrace{m = \sqrt[3]{M}}_{\text{Existe}}, M > 0$ $\forall M$

Luego esto queda $\forall x \geq \sqrt[3]{M}$

$x^3 \geq (\sqrt[3]{M})^3 = M$

$\Leftrightarrow f(x) \geq M$ ■

II) Demostrar $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$

Sabemos que si el Límite existe es único

Sea $X_n = \dfrac{1}{2n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n \rightarrow 0^+$

$V_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad V_n \rightarrow 0^+$

Luego $\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \lim_{x \to 0^+} \sin\left(1/1/(2n\pi + \pi/2)\right)$

cambia yacen tiende $\lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi) = 0 \overset{?}{=} \lim_{n \to \infty} (2n\pi + \pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Aux 2016 - 5 ...

III) $\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1$

Lo primero es anotar la definición particularizado al caso que tenemos como $x \to 8$ y $\lim$ % $= 1$ es acotada en su límite y tendencia por lo que debemos usar ε-δ

$$\lim_{x \to 8} \frac{x-6}{2} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \overbrace{|x-8| < \delta}^{p} \Rightarrow \overbrace{\left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon}^{q}$$

\# Demostraremos a través de encontrar la existencia de δ para cumplir con la condición de ε arbitrario.

\# Tomaremos un lado de la implicancia y llegaremos al otro, este desarrollo debe ser a través de equivalencias. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ hipótesis $\Rightarrow$ tesis

\# Estudiaremos $q \Leftrightarrow \left|\frac{x-6}{2} - 1\right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-8}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x-8|}{|2|} < \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{|x-8| < 2\varepsilon}_{\text{tengo la hipótesis.}}$$

\# El paso más importante.

Lo que tengo $|x-8| < \delta$

Lo que quiero llegar $|x-8| < 2\varepsilon$

Así basta tomar $\delta = 2\varepsilon$ para tener lo pedido

IV) PDQ !!

$\left[\lim_{x\to 1} (2x^2 - 1) = 1\right] \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) |x-1| < \delta \Rightarrow |2x^2-1-1| < \varepsilon$

Tenemos $|x-1| < \delta \Rightarrow |2x^2 - 2| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow 2|x+1||x-1| < \varepsilon$$

En este caso tenemos parcialmente la hipótesis $|x-1| < \delta$, pero no puede depender δ de x ni de nada.

\# Supongamos $|x-1| < 1$ → arbitrario!!

$$\Leftrightarrow -1 < x-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2 \quad , x \in (0,2) = A \quad \text{no vacío y acotado} \Rightarrow \sup_{x\in A} A = 2, \inf_{x\in A} A = 0.$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow 1 < x+1 < 3 \quad , (x+1) \in (1,3) = B, \sup_{x\in B} B = 3, \inf_{x\in B} B = 1}_{\text{Esta será una condición adicional que impondré.}}$$

luego $2\overbrace{|x+1|}^{\text{a lo más llega a 3, sup.}}|x-1|$

$$\leq 2 \sup_{x\in B} B \cdot |x-1|$$

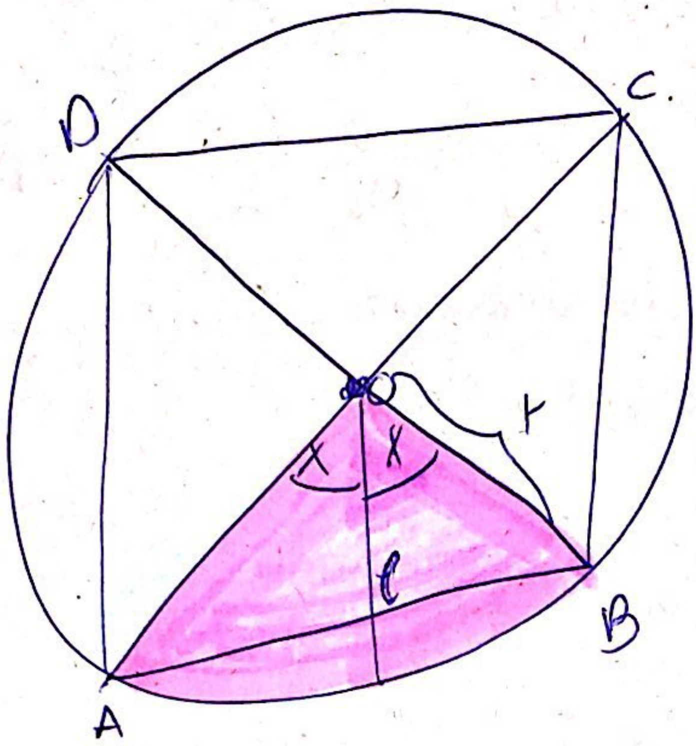
$$= 2 \cdot 3 \, |x-1| < \varepsilon$$

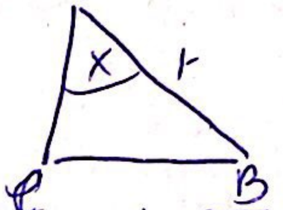
$$\Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$$

De esta forma tenemos $|x-1| < \delta$ y queremos tener $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$ $\Leftrightarrow |2x^2-2| < \varepsilon$

Para esto basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$, pero en \# supusimos algo, por lo que hay que tomarlo, luego $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ Así se cumplen ambos simultáneamente

P2)





$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\overline{eB}}{r}$$

$A' \triangleleft AOB$, fórmula general área sector circular

$$\frac{1}{2}\theta r^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 (2x) = A \triangleleft AOB$$

$$A' \square ABCD = AB \cdot BC = 4 \operatorname{sen}(x) \cos(x) r^2$$

$$AB = 2\overline{eB} = 2 \operatorname{sen}(x) \cdot r$$

$$BC = 2\overline{eO} = 2\cos(x) \cdot r$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cancel{r^2} \cdot \cancel{2}x}{4 \operatorname{sen}(x) \cos(x) \cdot \cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right]} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

P3) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(1+e^x)(x^2-4)}$$

a) Primero debemos definir bien el dominio

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$0 \neq e^x + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Así que no causa problema.

$x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow A = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Crecimiento: $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1^3 - 2x_1^2)}{(1+e^{x_1})(x_1^2-4)} - \frac{(x_2^3 - 2x_2^2)}{(1+e^{x_2})(x_2^2-4)}$$

Esta parte se omite (pues no es lo que busca el ejercicio.

Signos $\dfrac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x^2-4)}$

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 2	2 a ∞
x^2	+	+	+	+
$1+e^x$	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$x-2$	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+
	-	+	+	+

¿Que ocurre com $x=-2$, $x=2$?

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2\cancel{(x-2)}}{(1+e^x)\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)}$$

$$= \frac{\cancel{4}}{(1+e^2)\cdot\cancel{4}} = \frac{1}{e^2+1}$$

Como es umponto abierto no es Asintota vertical.

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} f(x) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^3-2x^2}{(1+e^x)(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{x^2}{(1+e^x)(x+2)} = \pm\infty$$, por como se comporta x^2, $1+e^x$.

$x=-2$ Asintota vertical.

ii) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x-2)}{(1+e^x)(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}^{\,0}}{\cancel{e^x}+1}\cdot\frac{\cancel{x^2-2x}^{\,1}}{\cancel{x^2}-4} = 0$$

$\lim_{x\to\infty} e^x \gg \lim_{x\to\infty} x$ | luego $y=0$ es A. H.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{x}^{\,-\infty}}{\cancel{e^x}+1}\cdot\frac{\cancel{x^2-2x}^{\,1}}{\cancel{x^2}-4} = -\infty$$, no es A. H.

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x+1} \cdot \frac{x^2-2x}{x^2-4} - \overbrace{x\,\frac{(e^x+1)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2+(-xe^x-x)(x^2-4)}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^3}-2x^2-x^3e^x+4xe^x-\cancel{x^3}+4x}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)} + \frac{e^x[4x-x^3]}{(e^x+1)(x^2-4)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{4x-2x^2}{(e^x+1)(x^2-4)}}_{\to -2} + \underbrace{\frac{e^x(-x)\cancel{(x^2-4)}}{(e^x+1)\cancel{(x^2-4)}}}_{\to 0} = \underline{-2} = n$$

$y = x-2$ Oblicua.