Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
24 de marzo de 2023

Auxiliar 1: Lógica

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Determine el valor de verdad de la proposición s en los siguientes casos, con la información que se asigna (es decir no necesariamente hay solo un valor posible para s, puede que a veces no se pueda determinar; además p, q, r, t son también proposiciones):

- $(p \implies q) \implies s$ es falsa.
- $s \wedge q \wedge r \wedge t \wedge p$ es verdadera.
- $(p \wedge r) \wedge (s \iff r)$ es verdadera.
- $(p \wedge s) \vee p$ es falsa.
- $(p \implies s) \implies \overline{(s \wedge t)}$ es falsa.

P2. Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías utilizando ambos métodos: exploratorio y simbólico.

- $(p \implies \overline{q}) \wedge (r \implies q) \implies (p \implies \overline{r})$
- $(\overline{p} \vee q) \vee (\overline{r} \wedge \overline{p}) \iff (p \implies q)$
- $(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r \implies \overline{p}$

P3. Determine los valores de las proposiciones p, q, r, s, t sabiendo que la siguiente proposición es falsa:

$$[(p \iff q) \wedge \overline{(p \implies s)} \wedge \overline{t}] \implies [s \vee (q \implies s)]$$

P4. Considere las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ que cumplen que la proposición $\overline{(p_1 \iff p_2)} \implies (p_4 \implies p_3)$ es falsa. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\overline{((p_5 \vee p_6) \wedge (p_1 \wedge p_2))} \implies (p_3 \implies p_4)$$

P5. Demuestre por contradicción la siguiente afirmación:

$$p \text{ es un número primo} \implies \sqrt{p} \text{ no es racional}$$

Resumen

Tautologías básicas

- Dominancia: $p \vee V \iff V$, $\quad p \wedge F \iff F$
- Identidad: $p \wedge V \iff p$, $\quad p \vee F \iff p$
- Idempotencia: $p \wedge p \iff p$, $\quad p \vee p \iff p$
- Doble negación: $\neg(\neg p) \iff p$
- Tercio excluso: $p \vee \overline{p} \iff V$
- Consistencia: $p \wedge \overline{p} \iff F$
- Absorción: $p \vee (p \wedge q) \iff p$, $p \wedge (p \vee q) \iff p$
- Relajación: $p \vee q \implies p$, $\quad p \implies p \vee q$
- Caracterización de la implicancia: $(p \implies q) \iff \overline{p} \vee q$

Álgebra Booleana

- Leyes de De Morgan: $\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}$, $\quad \overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$
- Conmutatividad: $p \wedge q \iff q \wedge p$, $\quad p \vee q \iff q \vee p$
- Asociatividad: $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
- Distributividad:
  - Del $\vee$ con respecto al $\wedge$:
  $$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad (q \vee r) \wedge p \iff (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$$
  - Del $\wedge$ con respecto al $\vee$:
  $$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r), \qquad (q \wedge r) \vee p \iff (q \vee p) \wedge (r \vee p)$$
- Transitividad:
  - Del $\implies$:
  $$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$$
  - de la $\iff$:
  $$(p \iff q) \wedge (q \iff r) \implies (p \iff r)$$

Técnicas de demostracíon: Las siguientes **tautologías** pueden resultar útiles al momento de querer demostrar resultados matemáticos:

- Equivalencia dividida: $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$
- Demostración por casos: $(p \vee p' \implies q) \iff (p \implies q) \wedge (p' \implies q)$
- Regla de separación (Modus Ponens): $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$
- Contrarrecíproca: $(p \implies q) \iff (\overline{q} \implies \overline{p})$
- Contradicción o reducción al absurdo: $[(p \implies q) \iff V] \iff [p \wedge \overline{q} \implies F]$