Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
25 de abril de 2023

Auxiliar 6: Conjunto Imagen y Preimagen e introducción a Relaciones

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Sea $f : E \longrightarrow F$ función.

a) $\forall A, B \subseteq E, f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

b) $\forall A, B \subseteq E, f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B) \iff f$ es inyectiva

c) $\forall Y \subseteq F, f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

d) $\forall Y \subseteq F, f(f^{-1}(Y)) = Y \iff f$ es epiyectiva.

e) $\forall Y \subseteq F, f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c$

P2. a) Sea $f : A \longrightarrow B$ función y sean $X, Y \subseteq A$. Pruebe que:

$$f(B) \setminus f(A) = \emptyset \implies f(A \cup B) = f(A)$$

b) Sea $f : A \longrightarrow B$ función y $C \subseteq A$. Se define $g : C \longrightarrow B$ como $g(x) = f(x)$. Demuestre que $\forall D \subseteq B, g^{-1}(D) = C \cap f^{-1}(D)$

P3. Sean R una relación sobre $\mathbb{R}$, ψ una relación sobre $P(E)$, con E conjunto de referencia con al menos 4 elementos.
Determine la veracidad o falsedad de las siguientes aseveraciones, y de un contraejemplo cuando corresponda:

- $xRy \iff |x| = |y|$ es una relación de equivalencia
- $xRy \iff x \geq y$, es una relación de equivalencia.
- $xRy \iff |x| = y$, es una relación de equivalencia.
- $X\psi Y \iff X \subseteq Y$ es una relación de orden.
- $X\psi Y \iff X \cap Y = \emptyset$ es una relación de orden
- $X\psi Y \iff |X \cap Y| \geq \frac{|X|}{2} \wedge |X \cap Y| \geq \frac{|Y|}{2}$, es una relación de equivalencia.

P4. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1, b \geq 2$, se define en $\mathbb{Z}$ la relación R dada por:

$$xRy \iff b|ax + y$$

i) Demuestre que R es refleja $\iff b|a + 1$

ii) Demuestre que si R es simétrica, entonces $b|a^2 - 1$

iii) Demuestre que para $a = 3, b = 4$, R es relación de equivalencia.

Resumen

[**Conjunto Imagen**] Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $A' \subseteq A$, se define el conjunto imagen de A' como:

$$f(A') = \{f(x) \in B : x \in A'\} = \{y \in B | \exists x \in A' : f(x) = y\}$$

[**Algunas propiedades**] Sean $A_1, A_2 \subseteq A$, entonces se tiene:

- $A_1 \subseteq A_2 \implies f(A_1) \subseteq f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

[**Conjunto Preimagen**] Sea $f : A \longrightarrow B$ una función y sea $B' \subseteq B$, se define el conjunto preimagen de B' como:

$$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$$

[**Algunas propiedades**] Sean $B_1, B_2 \subseteq B$, entonces se tiene:

- $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

[**Relación**] Una tripleta de conjuntos (A, B, R) es una relación si cumple $R \subseteq A \times B$
Para $(a, b) \in A \times B$, decimos aRb si $(a, b) \in R$ y $a \not{R} b$ si $(a, b) \notin R$

[**Propiedades de relaciones**] Sea R una relación en A es:

- **Refleja** sí $\forall x \in A, xRx$
- **Simétrica** si $\forall x, y \in A, xRy \implies yRx$
- **Antisimétrica** si $\forall x, y \in A, xRy \wedge yRx \implies x = y$
- **Transitiva** si $\forall x, y, z \in A, xRy \wedge yRz \implies xRz$

La relación R se dice de **orden** si es refleja, antisimétrica y transitiva.
La relación R se dice de **equivalencia** si es refleja, simétrica y transitiva.