Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
1 de junio de 2023

Auxiliar 10: Conjuntos infinitos
Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Demuestre los cardinales pedidos en cada caso:

i) $A = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b + c = 5\}, \quad |A| = |\mathbb{N}|$

ii) $F = \{f \mid f : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ función } \}, \quad |F| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$

iii) $L_1 = \{l \mid l$ recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por (π, π) y corta el eje OY en coordenada racional$\}$
$|L_1| = |\mathbb{Q}|$

iv) $L_2 = \{l \mid l$ recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por (π, π) y corta el eje OY en coordenada irracional$\}$
$|L_2| = |\mathbb{R}|$

v) Con iii) y iv) concluya que la cantidad de rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por (π, π) es no numerable y que además este resultado se tiene si es que cambiáramos el punto (π, π) por cualquier punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ con $a \neq 0$.

P2. a) Sea A un conjunto infinito no numerable y sea $B \subseteq A$ de cardinal infinito.
¿Qué puede decir de la cardinalidad del conjunto $A \setminus B$?
Indicación: Póngase en casos para la cardinalidad de B.

b) Sea $S_3 = \{X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |X| = 3\}$. Demuestre que S_3 es numerable.
¿Funciona el mismo argumento para $S_j = \{X \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |X| = j\}$, con $j \in \mathbb{N}$?

c) Sea N_{K_4} el conjunto que contiene a todos los cuadriláteros en $\mathbb{R}^2$ que tienen sus 4 coordenadas racionales, es decir, en $\mathbb{Q}^2$. Demuestre que N_{K_4} es numerable.
Indicación: La parte anterior puede servir como guía.

P3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, y se define $U = \{f_n(a) | a \in A, n \in \mathbb{N}\}$. Demuestre que si A es numerable, entonces U es numerable.

P4. **[Propuesto]** Sean A, B, C conjuntos infinitos tales que:

- $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap C = \emptyset$
- $|B| = |C|$

Demuestre entonces que se cumple $|A \cup B| = |A \cup C|$

Resumen

[Cardinal] $|A| = |B| \iff \exists f : A \longrightarrow B$ biyectiva. y $|A| \leq |B| \iff \exists f : A \longrightarrow B$ inyectiva.
[Definiciones] Para A, B conjuntos no vacíos, se tiene que.

i) $|A| \leq |A|$

ii) Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$

iii) Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ entonces $|A| \leq |C|$

iv) $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A| \iff |A| = |B|$

[Cardinal del conjunto imagen] Si $f : A \longrightarrow B$ función, entonces $|f(A)| \leq |A|$.
[Conjunto Infinito] Un conjunto A que no es finito se dice infinito
[Proposición] $\mathbb{N}$ es infinito
[Conjuntos Numerables] Un conjunto se dice numerable si tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$
[Proposiciones respecto a numerabilidad]

- $|\mathbb{N}|$ es el menor cardinal infinito.
- Sea A conjunto infinito y B conjunto finito, entonces $|A \cup B| = |A \setminus B| = |A|$.
- **[Unión finita de numerables]** Si $A_1, A_2, .., A_n$ es una familia de conjuntos numerables, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ también lo es
- **[Unión numerable de numerables]** La unión numerable de conjuntos numerables, también es numerable.
- **[Producto finito de conjuntos numerables]** Si $A_1, .., A_n$ es una familia de conjuntos numerables, entonces $A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, .., a_n) : \forall i \in \{1, .., n\}, a_i \in A_i\}$ también lo es.

Ejemplos: Los siguientes conjuntos son numerables: $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, (\mathbb{N} \times \mathbb{N}), ((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \times (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})))^3$, etc.

[Conjuntos no numerables] Existen conjuntos tales que su cardinal es infinito y es distinto al cardinal de los naturales, dichos conjuntos se dicen no numerables.

[Teorema de Cantor] El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor al cardinal del conjunto, es decir, si A es un conjunto, es decir $|A| < |P(A)|$.

[Proposición]: $|P(N)| \leq |[0, 1]|$
[Corolario]: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$. En particular $\mathbb{R}$ no es numerable.

[Hipótesis del continuo - Información adicional]:
En resumidas cuentas, hay una hipótesis (Georg Cantor,1878) en matemáticas que dice:

No existe un conjunto B tal que $|\mathbb{N}| < |B| < |\mathbb{R}|$

Se demostró en 1963 (Paul Cohen) que esta hipótesis no es demostrable con los axiomas que conforman la teoría de conjuntos estándar, es decir, no es posible brindar una demostración que testifique su veracidad (en 1940 Kurt Gödel demostró que no es posible demostrar la falsedad de la hipótesis).
Además, se ha evidenciado que asumir esta hipótesis cierta o asumirla como mentira no conlleva ninguna contradicción con las bases axiomáticas de la teoría de conjuntos utilizada en la mayor parte de la matemática moderna.