Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
5 de junio de 2023

Auxiliar 11: Estructuras Algebraicas

Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Se define $\mathbb{R}^2$ la ley de composición interna $*$ por

$$(a.b) * (c, d) = (ac, bc + d)$$

a) Estudiar conmutatividad y asociatividad de $*$

b) Determine el neutro de $(\mathbb{R}^2, *)$

c) Determine qué elementos son invertibles para $*$ y calcule sus inversos.

d) Determine los elementos idempotentes de $(\mathbb{R}^2, *)$

P2. Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa, pero no necesariamente conmutativa.
Se define el *centro* de A como el conjunto que tiene a los elementos de A que conmutan con todo el resto, es decir $C(A) = \{x \in A : \forall a \in A, x * a = a * x\}$

i) Pruebe que $(C(A), *)$ es una estructura algebraica.

ii) Demuestre que si $(A, *)$ posee neutro e, entonces $e \in C(A)$ y también e es neutro de $(C(A), *)$.

iii) Pruebe que si $x \in C(A)$ posee inverso x^{-1}, entonces $x^{-1} \in C(A)$.

iv) De forma similar, se define:

$$C^2(A) = \{x \in A : (x * a)^2 = (a * x)^2\}$$

con la notación $x^2 = x * x$.
Pruebe que los items i), ii) y iii) son válidos si se reemplaza $C(A)$ por $C^2(A)$.

P3. Sea f un homomorfismo desde $(\mathbb{Q}, +)$ hacia $(\mathbb{R}, +)$

i) Demuestre que $f(0) = 0$ y que $f(2r) = 2f(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

ii) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $r \in \mathbb{Q}$ se tiene $f(n \cdot r) = n \cdot f(r)$.

iii) Demuestre que para todo $a, r \in \mathbb{Q}$ se tiene que $f(a \cdot r) = a \cdot f(r)$

iv) Concluya que necesariamente $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = c \cdot r$ con $c \in \mathbb{R}$, es decir, necesariamente f es una función lineal.

P4. **[Propuesto]** Sea $(X, *)$ una estructura algebraica asociativa, con un neutro e. Para $a \in X$ fijo, con inverso a^{-1}, se define la operación $\triangle$ dada por:

$$x \triangle y = x * a * y, \ \ \forall x, y \in X$$

Demuestre que la operación $\triangle$ es asociativa y encuentre su neutro e. Calcule el inverso de a bajo la operación $\triangle$.

Resumen

- Dado un conjunto A no vacío. Diremos que $*$ es una ley de composición interna (l.c.i) si $*$ es una función

$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

- Si $*$ es una l.c.i definida en un conjunto A, entonces al par $(A, *)$ lo llamaremos **estructura algebraica**.
  Si sobre A tenemos definida una segunda operación $\triangle$, denotaremos $(A, *, \triangle)$ a la estructura algebraica que considera ambas l.c.i en A
- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.
  1. Diremos que $*$ es **asociativa** si
  $$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$
  2. Sea $e \in A$. Diremos que e es elemento **neutro para *** si
  $$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$
  3. Si $e \in A$ es el neutro para $*$, diremos que $x \in A$ es **invertible si:**
  $$\exists y \in A, y * x = x * y = e$$
  En tal caso, diremos que existe inverso de x y más aun y es un inverso de x
  4. Diremos que $*$ es **conmutativa** si
  $$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$
  5. Sea $a \in A$. Diremos que a es **absorbente** si:
  $$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$
  6. Sea $a \in A$. Diremos que a es **idempotente** si $a * a = a$
  7. Sea $a \in A$. Diremos que a es **cancelable** si $\forall y, z \in A$ se tienen:
  $$a * y = a * z \Rightarrow y = z$$
  $$y * a = z * a \Rightarrow y = z$$
  8. Sea $(A, *, \triangle)$ una estructura algebraica con dos operaciones. Diremos que $\triangle$ **distribuye** con respecto a $*$ si para todo $x, y, z \in A$, se tienen:
  $$x \triangle (y * z) = (x \triangle y) * (x \triangle z)$$
  $$(y * z) \triangle x = (y \triangle x) * (z \triangle x)$$

- Sea (A,*) una estructura algebraica. Se tiene que $a \in A$ es cancelable si y sólo si las funciones I_a y D_a definidas por $I_a(x) = a * x$ y $D_a(x) = x * a$ para $x \in A$, son inyectivas.
- En una estructura algebraica $(A, *)$, el elemento neutro es **único**.
- Si la estructura algebraica $(A, *)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos son unicos.
  De esta forma el inverso de $x \in A$, lo podemos denotar sin ambigüedad como x^{-1}
- Sea $(A, *)$ una estructura algebraica asociativa y con neutro $e \in A$ entonces:
  1. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aun, $(x^{-1})^{-1} = x$
  2. Si $x, y \in A$ son invertibles entonces $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
  3. Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.
- Se define $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n$. A partir de esto podemos definir:
  - $[x]_n + [y]_n = [x + y]_n$
  - $[x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$

  Recordemos además que si $x \equiv_n y$, entonces $[x]_n = [y]_n$
- Sea $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 \equiv_n x_2$ y $y_1 \equiv_n y_2$. Entonces
  $$(x_1 + y_1) \equiv_n (x_2 + y_2) \text{ y } (x_1 \cdot y_1) \equiv_n (x_2 \cdot y_2)$$
  Es decir, si $[x_1]_n = [x_2]_n$ y $[y_1]_n = [y_2]_n$, entonces
  $$[x_1 + y_1]_n = [x_2 + y_2]_n \text{ y } [x_1 \cdot y_1]_n = [x_2 \cdot y_2]_n$$
- (*Notación*) $x \equiv_n y \iff x = y \pmod{n}$
- Para dos estructuras $(A, *), (B, \triangle)$ una función $f : A \to B$ es un **homomorfismo** de $(A, *)$ en $(B, \triangle)$ si $\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \triangle f(y)$.
  - Si f es inyectiva se llamará monomorfismo
  - Si f es epiyectiva se llamará epimorfimo
  - si f es biyectiva se llamará isomorfimo
  - Si $(A, *) = (B, \triangle)$ los homomorfimos se llamaran endomorfimos y en caso que si el endomorfimo es biyectivo se llamará automorfismo.