Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
13 de julio de 2023

Auxiliar 14: Complejos
Profesor: Alexander Frank
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Escriba en forma cartesiana las siguientes expresiones:

i) $(1+\sqrt{3})^7$ ii) $\dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^3}$ iii) $\dfrac{1-3i}{|1+i|^2+2i}$

P2. i) Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Demuestre que:

$$\frac{z}{\overline{z}} \in \mathbb{R} \iff Re(z) = 0 \vee Im(z) = 0$$

ii) Sea $z \in \mathbb{C}$. Muestre que:

$$|z-i| = |z-1| \iff Re(z) = Im(z)$$

iii) Sea $z \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|z+\alpha| = |z|$. Muestre que $Re(z) = \frac{-\alpha}{2}$

iv) Resuelva la ecuación para z:

$$z^2 = -2i + 3$$

P3. i) Sean $z_1, .., z_n$ números complejos de módulo 1.
Demuestre que si $\sum_{i=1}^{n} z_i = a \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_i} = a$

ii) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1+i$$

P4. Sean a, b, c, d números complejos del mismo módulo, tales que $a+b+c=d$.
Muestre que d es igual a a, b o c.

P5. **[Propuesto]** Muestre que si z_1, z_2 son números complejos con $|z_1| = |z_2| = 1$ y $z_1 z_2 \neq 1$, entonces $\frac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ es un número real.

P6. **[Propuesto]** Encuentre los números complejos tales que $Im(z + \frac{1}{z}) = 0$.

P7. **[Propuesto]** Demostrar las últimas 12 propiedades del resumen.

- Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones, donde $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo
  1. $(0, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, +)$
  2. $(1, 0)$ es el neutro de $(\mathbb{C}, \cdot)$
  3. El inverso en $(\mathbb{C}, +)$ de (a, b) es $(-a, -b)$.
  4. El inverso en $(\mathbb{C}, \cdot)$ de $(a, b) \neq (0, 0)$ es $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
- La unidad imaginaria es el complejo (0,1). Se anotará como i. Se cumple que $i^2 = -1$
- **Forma cartesiana:** La expresión $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ se llama la *forma cartesiana* del complejo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$.
- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos la parte real y la parte imaginaria respectivamente como:

$$Re(z) = a \qquad Im(z) = b$$

- $Re(\cdot)$ y $Im(\cdot)$ son morfismos de $(\mathbb{C}, +)$ en $(\mathbb{C}, +)$, es decir, son endomorfismos. Por lo tanto cumplen que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
  1. $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$.
  2. $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$.
- Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:
  1. $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$.
  2. $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$.
  3. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [Re(z_1) = Re(z_2) \wedge Im(z_1) = Im(z_2)]$
- se define para $n \in \mathbb{Z}$

$$i^n = \begin{cases} +1 & si \quad n \equiv_4 0 \\ +i & si \quad n \equiv_4 1 \\ -1 & si \quad n \equiv_4 2 \\ -i & si \quad n \equiv_4 3 \end{cases}$$

- Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, en virtud del teorema de pitagoras se define la distancia de z hasta el origen como:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define su conjugado como $\overline{z} = a - bi$
- Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces:
  1. $\overline{\overline{z}} = z$.
  2. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
  3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$.
  4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$. Si $w \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
  5. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
  6. $Re(z) = Re(\overline{z})$ y $Im(z) = -Im(\overline{z})$.
  7. $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ y $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
  8. $|z| = |\overline{z}|$
  9. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
  10. $|zw| = |z||w|$ y $|z + w| \leq |z| + |w|$.
  11. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
  12. Si $w \neq 0$, entonces $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.