3. Semana 2

P1
- Caso base ($n = 1$): $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ claramente divisible por 24.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24k$, para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 24j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 14 \cdot 7^n + 15 \cdot 5^n - 5 \\
&= 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n \\
&= 24k + 12(7^n + 5^n) \qquad \text{\textbackslash hipótesis inductiva} \\
&= 24k + 12(2l) \qquad \text{\textbackslash}7^n + 5^n \text{es siempre par (suma de 2 impares)} \\
&= 24(k + l) \\
&= 24j \qquad \text{\textbackslash con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para convencerse vamos a demostrar que $7^n + 5^n$ es par o lo que es lo mismo, demostrar que es divisible por 2, se hará mediante inducción.

- Caso base ($n = 1$): $7^1 + 5^1 = 12$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $7^n + 5^n = 2k$, para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $7^{n+1} + 5^{n+1} - 5 = 2j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
7^{n+1} + 5^{n+1} &= 7 \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 7^n + 4 \cdot 5^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 7^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 2k \qquad \text{\textbackslash hipótesis inductiva} \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n) + 2k \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n + k) \\
&= 2j \qquad \text{\textbackslash con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

P2
- Caso base ($n = 10$): $10^3 = 1000 < 2^{10} = 1024$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $n^3 \leq 2^n$, para cierto $n \geq 10$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $(n + 1)^3 < 2^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
(n + 1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 1 \quad \text{\textbackslash como } 1 < 3n \text{ multiplicando por } n \text{ se tiene } 3n < 3n^2 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 \quad \text{\textbackslash como } 1 < \sqrt{3}n \text{ elevando a 2 se tiene que } 1 < 3n^2 \\
&< n^3 + 9n^2 \\
&< n^3 + n^3 \qquad \text{\textbackslash como } 9 < n \text{ multiplicando por } n^2 \text{ se tiene } 9n^2 < n^3 \\
&< 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad \text{\textbackslash hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Es posible realizar el problema de otra manera, menos directa, pero igualmente válida, que es hacer inducción sobre inducción, es decir, si en el momento que realizan el paso inductivo llegan a una desigualdad que no es directa, pero les ayuda a resolver el problema, la demuestran con inducción, pueden aplicar inducción sobre inducción cuantas veces quieran.

P3 Primero calculamos $a(3) = 3[a(2) + a(1)] + 1 = 7$ y $a(4) = 3[a(3) + a(2)] + 1 = 25$.

(a)
- Caso base ($n = 1$): $a(3 \cdot 1 + 2) - 1 = a(5) - 1 = 3[a(4) + a(3)] = 3[3[a(3) + a(2)] + 1 + a(3)] = 96$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n + 2) - 1 = 2k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $a(3(n + 1) + 2) - 1 = 2j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)+2) - 1 &= a(3n+5) - 1 \\
&= 3[a(3n+4) + a(3n+3)] \\
&= 3[3[a(3n+3) + a(3n+2)] - 1 + a(3n+3)] \\
&= 3[4a(3n+3) + 2a(3n+2) + a(3n+2) - 1] \\
&= 3[4a(3n+3) + 2a(3n+2) + 2k] \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= 2(3[2a(3n+3) + a(3n+2) + k]) \\
&= 2j \qquad \backslash\text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(b)
- Caso base ($n = 1$): $3a(3 \cdot 1 + 1) + 5 = 3a(4) + 5 = 80$ claramente divisible por 8.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $3a(3n + 1) + 5 = 8k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto
- PDQ $3a(3(n + 1) + 1) + 5 = 8j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
3a(3(n+1)+1) + 5 &= 3a(3n+4) + 5 \\
&= 3[3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1] + 5 \\
&= 9[a(3n+3) + a(3n+2)] + 8 \\
&= 9[3[a(3n+2) + a(3n+1)] + 1 + a(3n+2)] + 8 \\
&= 36a(3n+2) + 27a(3n+1) + 17 \\
&= 36[a(3n+2) - 1] + 36 + 9[3a(3n+1) + 5] - 45 + 17 \\
&= 36(2i) + 36 + 9[3a(3n+1) + 5] - 45 + 17 \quad \backslash\text{parte (a)} \\
&= 36(2i) + 9(8k) + 8 \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= 8(9i + 9k + 1) \\
&= 8j \qquad \backslash\text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(c)
- Caso base ($n = 1$): $a(3 \cdot 1) + a(3 \cdot 1 + 1) = a(3) + a(4) = 32$ claramente divisible por 32.

- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n) + a(3n+1) = 32k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) = 32j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) &= a(3n+3) + a(3n+4) \\
&= a(3n+3) + 3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 4(3a(3n+2) + 3a(3n+1) + 1) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 15a(3n+2) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 15(3[a(3n+1) + a(3n)] + 1) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 45(32k) + 15 + 12a(3n+1) + 5 \qquad \backslash \text{H.I} \\
&= 45(32k) + 15 + 4(3a(3n+1) + 5) - 20 + 5 \\
&= 45(32k) + 32i \quad \backslash \text{parte (b)} \\
&= 32(45k + i) \\
&= 32j \qquad \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

P4

- Caso base ($n=1$): $(1+x) = \frac{x^{2^1}-1}{x-1} = \frac{(1+x)(x-1)}{x-1} = (x+1)$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) &= \frac{x^{2^n}-1}{x-1}(1+x^{2^n}) \qquad \backslash \text{H.I.} \\
&= \frac{x^{2^n} + x^{2^n+2^n} - 1 - x^{2^n}}{x-1} \\
&= \frac{x^{2 \cdot 2^n} - 1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x-1}
\end{aligned}$$