



4. Semana 3

P1 (a) (1) Por álgebra lógica:

$$(\forall x)[x \in B \setminus A \Rightarrow x \in C]$$

Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned} x_0 \in B \setminus A &\Rightarrow x_0 \in C \\ \Leftrightarrow x_0 \in B \cap A^c &\Rightarrow x_0 \in C \\ \Leftrightarrow x_0 \in B \wedge x_0 \in A^c &\Rightarrow x_0 \in C \\ \Leftrightarrow x_0 \notin B \vee x_0 \notin A^c \vee x_0 \in C & \\ \Leftrightarrow x_0 \in B^c \vee x_0 \in A \vee x_0 \in C & \\ \Leftrightarrow x_0 \notin C^c \vee x_0 \in B^c \vee x_0 \in A & \\ \Leftrightarrow x_0 \notin C^c \vee x_0 \in (B^c \cup A) & \\ \Leftrightarrow x_0 \in C^c \Rightarrow x_0 \in (B^c \cup A) & \end{aligned}$$

Como es para un x_0 arbitrario se concluye que $C^c \subseteq (B^c \cup A)$.

(2)

$$\begin{aligned} B \setminus A &\subseteq C \\ \Leftrightarrow C^c &\subseteq (B^c \cup A) \setminus \cap D \\ \Rightarrow C^c \cap D &\subseteq (B^c \cup A) \cap D \\ \Leftrightarrow (D \setminus C) &\subseteq (B^c \cup A) \cap D \\ \Leftrightarrow (D \setminus C) &\subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \\ \Leftrightarrow (D \setminus C) &\subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \subseteq (B^c \cap D) \cup A \quad \setminus X \cap D \subseteq X \text{ siempre!} \\ \Rightarrow (D \setminus C) &\subseteq (B^c \cap D) \cup A \end{aligned}$$

Nota: Siempre se tiene que, dados dos conjuntos cualesquiera A y B , $A \cap B \subseteq B$ y $A \subseteq A \cup B$, demostrar esto es bastante sencillo y se hace con álgebra lógica.

Para el primer caso

$$(\forall x)[x \in B \cap A \Rightarrow x \in A]$$

Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned} x_0 \in B \cap A &\Rightarrow x_0 \in A \\ \Leftrightarrow x_0 \in B \wedge x_0 \in A &\Rightarrow x_0 \in A \\ \Leftrightarrow x_0 \notin B \vee x_0 \notin A \vee x_0 \in A & \\ \Leftrightarrow V & \end{aligned}$$

Para el segundo caso

$$(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$$



Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned} x_0 \in A &\Rightarrow x_0 \in A \cup B \\ \Leftrightarrow x_0 \in A &\Rightarrow x_0 \in A \vee x_0 \in B \\ \Leftrightarrow x_0 \notin A \vee x_0 &\in A \vee x_0 \in B \\ \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

(b) \Rightarrow Se sabe que $A \subseteq A \cup B$, y que $A \cap C \subseteq C$ luego usando esto y la hipótesis se tiene que:

$$A \subseteq A \cup B = A \cap C \subseteq C$$

se concluye que $A \subseteq C$ y de manera análoga $B \subseteq A$.

\Leftarrow Como $B \subseteq A$, uniendo con A se tiene que $B \cup A \subseteq A \cup A$, además $A \subseteq A \cup B$, siempre, luego, uniendo ambas expresiones, se tiene la igualdad $B \cup A = A$, de manera análoga, como $A \subseteq C$, intersectando con A , se tiene que $A \cap A \subseteq C \cap A$, además $A \cap C \subseteq A$, juntando ambas expresiones se tiene que $A \cap C = A$, con esto se tiene finalmente que $A \cap C = A = B \cup A$, es decir, $A \cap C = B \cup A$.

P2

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \Delta C &= A \cup B \cup C \\ \Leftrightarrow (A \Delta B) \Delta C &= U \quad \backslash \text{ya que } C = (A \cup B)^c \\ \Leftrightarrow (A \Delta B) \Delta C &= U \quad \backslash \Delta C \\ \Rightarrow (A \Delta B) \Delta (C \Delta C) &= (U \Delta C) \\ \Leftrightarrow (A \Delta B) \Delta \emptyset &= C^c \\ \Leftrightarrow A \Delta (B \Delta \emptyset) &= C^c \\ \Leftrightarrow A \Delta B &= A \cup B \\ \Leftrightarrow (A \cup B) \backslash (A \cap B) &= A \cup B \\ \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= A \cup B \end{aligned}$$

Ahora procedemos a trabajar con esta igualdad mucho más sencilla que la original.

\Rightarrow Como $A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \subseteq (A \cap B)^c$, luego $A \cup B \subseteq (A \cap B)^c \Leftrightarrow A \cap B \subseteq (A \cup B)^c$, intersectando con A a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq (A \cup B)^c \quad \backslash \cap A \\ \Rightarrow A \cap B \cap A &\subseteq A^c \cap B^c \cap A \\ \Leftrightarrow A \cap B &\subseteq \emptyset \end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ siempre sucede se concluye que $A \cap B = \emptyset$.

\Leftarrow Como $A \cap B = \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) \cap (\emptyset)^c \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \end{aligned}$$