P1) Aux 07. ①

Se define en $\mathbb{N}$. $\mathcal{T}$ tq $m \mathcal{T} n \Leftrightarrow \underbrace{m = n}_{\text{condición 2.}} \vee \underbrace{(2 | m \wedge 2 | n)}_{\text{condición 1}}$

Verifique prop relaciones sea m, n en $\mathbb{N}$

1) refleja:

$$n \mathcal{T} n \Leftrightarrow \underbrace{2 | n \wedge 2 | n \Leftrightarrow 2 | n}_{\text{Condición 1}} \vee \underbrace{(n = n)}_{\text{Condición 2}}$$

En realidad ordenando información, por definición

$$n \mathcal{T} n \Leftrightarrow (n = n) \vee (2 | n)$$

$(n=n) \downarrow V$; $(2|n)$ ↳ no lo podemos saber a priori

$$\Leftrightarrow V \vee (2 | n) \Leftrightarrow V \,//$$ pues Dominancia disyunción

2) simétrica: PDQ $m \mathcal{T} n \Leftrightarrow n \mathcal{T} m$

$$\begin{aligned} n \mathcal{T} m &\Leftrightarrow (n = m) \vee (2 | n \wedge 2 | m) \quad \downarrow \text{simetría igualdad } \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ con conmutatividad conjunción} \\ &\Leftrightarrow (m = n) \vee (2 | m \wedge 2 | n) \quad \downarrow \text{def } \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow m \mathcal{T} n \,// \end{aligned}$$

3) Antisimétrica: si $m \mathcal{T} n \wedge n \mathcal{T} m \Rightarrow m = n$

Acá puedo decir de antemano que, no!, pero aún debemos probarlo se debe tener en cuenta que por lo general si algo es simétrico en pocos casos es antisimétrico

- Cuando quiero probar algo lo hago para todos, cuando quiero decir que no pasa para todos basta con un contraejemplo.

Estudiemos $mTm \wedge mTm$

$\Leftrightarrow mTm \wedge mTm$ ↓ Tsimetrica

$\Leftrightarrow mTm$ ↓ Idempotencia

$\Leftrightarrow (m=m) \vee (2|m \wedge 2|m)$; veamos $\underbrace{m=0 \wedge m=8}_{\text{Caso particular para contraejemplo}}$

luego $(m=m) \vee (2|m \wedge 2|m)$

$\Leftrightarrow \underbrace{(0=8)}_{F} \vee (\underbrace{2|0}_{V} \wedge \underbrace{2|8}_{V})$

$\Leftrightarrow F \vee (V \wedge V)$

$\Leftrightarrow F \vee V$

$\Leftrightarrow V$ Luego nos dice que la proposición

de Antisimetria $(mTm) \wedge (mTm) \Rightarrow m=m$

$\Leftrightarrow mTm \Rightarrow 8=0$ $\times$ ∴ No es antisimétrica.

4) Transitiva

Sea 1) $mTm \wedge mTz$ PDQ $mTz \Leftrightarrow (m=z) \vee (2|m \wedge 2|z)$

1) $\Leftrightarrow (mTm) \wedge (mT(z))$

$\Leftrightarrow [\underset{①}{(m=m)} \vee \underset{②}{(2|m \wedge 2|m)}] \wedge [\underset{③}{(m=z)} \vee \underset{④}{(2|m \wedge 2|z)}]$

tenemos una conjunción por lo que ambas partes

si ① cumple $m=m$ cómo usar la otra hipótesis ③ v ④

①,③ $m=m \wedge m=z \Rightarrow m=z \Rightarrow [(m=z) \vee (2|m \wedge 2|z)] \Leftrightarrow V$ dominacion $\Leftrightarrow mTz$

①,④ $m=m \wedge (2|m \wedge 2|z) \xRightarrow{\text{relajación}} 2|m \wedge 2|z \Leftrightarrow 2|m \wedge 2|z \Rightarrow [(m=z) \vee (2|m \wedge 2|z)] \Leftrightarrow V$ dominacion $\Leftrightarrow mTz$

∴ caso ① cumple ∴ se tiene transitiva mTz

Caso ② argumento simétrico y análogo

Luego refleja, simétrica, transitiva

ERIZO

3

P2) Sea E un conjunto no vacío, $K \in P(E) \setminus \{\phi\}$. Se def on $P(E)$ relación R_K, con $A, B \subseteq E$ tq $A R_K B \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B$

a) Probemos que R_K es refleja, por definición si $A \in P(E)$ arbitrario
Queremos ver $A R_K A \Leftrightarrow A \cap K \subseteq A$ lo cual es tautológico pues $\forall K \in P(E)$ se tiene la inclusión de $A \cap K \subseteq A$ por lo que como A arbitrario se tendrá que es refleja.

Probaremos que es transitiva, sea $A, B, C \in P(E)$ entonces por hipótesis
$A R_K B \wedge B R_K C \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B \wedge B \cap K \subseteq C$ luego tomamos $A \cap K \subseteq B \ / \cap K$
Esto es una implicancia pues intersecto ① a ambos lados luego $\Rightarrow (A \cap K) \cap K \subseteq B \cap K$
$\Leftrightarrow A \cap K \subseteq B \cap K \subseteq C$ luego por transitividad de la inclusión $A \cap K \subseteq C$ lo que equivale $A R_K C$ ∴ Transitiva

idempotencia ① Prop ya monótona

b) Demuestre que R_K es relación de orden $\Leftrightarrow K = E$. Veamos a través de una doble implicancia $\Rightarrow)$ si es orden cumple refleja, transitiva y antisimétrica, las 2 primeras las tenemos por lo que tenemos ahora adicional como hipótesis.
Entonces queremos verificar que si $A, B \in P(E)$ $A R_K B \wedge B R_K A \Rightarrow A = B$ entonces, $K \subseteq E$
$K = E$; pero tenemos que es antisimétrica para A, B arbitrarios,
sea $A = K \wedge B = E$ $A R_K B \Leftrightarrow K R_K E \Leftrightarrow K \cap K \subseteq E$ Verdad tautológico V
$\wedge B R_K A \Leftrightarrow E R_K K \Leftrightarrow E \cap K \subseteq K$ Verdad $K \subseteq K$ V
entonces como es verdad la hipótesis usamos que es antisimétrica $\Rightarrow K = E$
entonces como es verdad la hipótesis usamos que es antisimétrica, sea $A, B \in P(E)$ luego $K = E$
$\Leftarrow)$ si $K = E$ veamos que es antisimétrica, sea $A, B \in P(E)$
si $A R_K B \wedge B R_K A \Leftrightarrow A \cap K \subseteq B \wedge B \cap K \subseteq A \Leftrightarrow A \cap E \subseteq B \wedge B \cap E \subseteq A \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
$\Leftrightarrow A = B$ ∴ antisimétrica ∴ orden de relación

∴ $\Rightarrow)$ y $\Leftarrow)$ se tiene equivalencia.

P3) Sea $K \subseteq \mathbb{Q}$ no vacío y R_K definida $x R_K y \Leftrightarrow y - x \in K$

a) Dem R_K es refleja $\Leftrightarrow 0 \in K$ $\Rightarrow)$ si es refleja $\forall x \in K$ $x R_K x \Leftrightarrow x - x \in K \Leftrightarrow 0 \in K$
$\Leftarrow)$ Si $0 \in K \Leftrightarrow x - x \in K \Leftrightarrow x R_K x$ luego x arbitrario ∴ refleja.

b) Demuestre $R_{\mathbb{N}}$ es orden. Bueno tenemos que es refleja, verifiquemos lo $0 \in \mathbb{N}$
$R_{\mathbb{N}}$ refleja, luego sea $x, y \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ si $y R_{\mathbb{N}} x \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N} \wedge x R_{\mathbb{N}} y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$
si $(x-y) \in \mathbb{N} \wedge -(x-y) \in \mathbb{N}$ es decir su opuesto aditivo esto es ssi $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$
luego es antisimétrica, veamos transitividad sea $x, y, z \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ $x R_{\mathbb{N}} y \wedge y R_{\mathbb{N}} z$
$y - x \in \mathbb{N} \wedge z - y \in \mathbb{N}$ luego sabemos que $a, b \in \mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$ luego $(y-x)+(z-y)$
$= z - x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x R_{\mathbb{N}} z$ luego es transitiva luego es relación de orden //

c) Veamos que $R_{\mathbb{Z}}$ es relación de equivalencia: Refleja: sabemos que $0 \in \mathbb{Z}$ por parte a) es refleja. Simetría sea $x, y \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ tq $x R_{\mathbb{Z}} y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Z}$ pero su inverso multiplicativo igual por cerradura $\Rightarrow -(y-x) = x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y R_{\mathbb{Z}} x$, luego es simétrica. Veamos la transitividad sea $x R_{\mathbb{Z}} y \wedge y R_{\mathbb{Z}} z$, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ luego si $y - x \in \mathbb{Z}$ y $z - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (y-x)+(z-y) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x R_{\mathbb{Z}} z$ por cerradura de $\mathbb{Z}$.

Atte Patricio Yáñez

Consultas Pgomez@dim.uchile.cl