



## Resumen Final

### 1.-Logica Proposicional

- **[Tautologías básicas]:** Las siguientes proposiciones son tautologías:

- a) **Dominancia:**  $p \vee V \Leftrightarrow V, p \wedge F \Leftrightarrow F$
- b) **Identidad:**  $p \wedge V \Leftrightarrow p, p \vee F \Leftrightarrow p$
- c) **Idempotencia:**  $p \wedge p \Leftrightarrow p, p \vee p \Leftrightarrow p$
- d) **Doble negación:**  $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
- e) **Tercio excluso:**  $p \vee \bar{p} \Leftrightarrow V$
- f) **Consistencia:**  $p \wedge \bar{p} \Leftrightarrow F$
- g) **Absorción:**  $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- h) **Relajación:**  $p \wedge q \Rightarrow p, p \Rightarrow p \vee q$
- i) **Caracterización de la implicancia:**  
 $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bar{p} \vee q$

- **[Álgebra Booleana]:** Son tautologías:

- **Leyes de De Morgan:**  
 $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}, \overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

- **Conmutatividad:**  
 Del  $\vee$ :  $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$   
 Del  $\wedge$ :  $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

- **Asociatividad**  
 Del  $\vee$ :  $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$   
 Del  $\wedge$ :  $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

- **Distributividad**  
 Del  $\wedge$  con respecto al  $\vee$ :  
 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$   
 Del  $\vee$  con respecto al  $\wedge$ :  
 $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- **[Tautologías relevantes]:** Otras tautologías a tener en cuenta son:

- a) **Doble implicancia:**  
 $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- b) **Modus Ponens:**  $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

- c) **Transitividad:**  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

- d) **Contrareciproca:**  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

- e) **Contradicción:**

- Forma 1:  $q \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow F)$
- Forma 2:  $[(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow V] \Leftrightarrow [p \wedge \bar{q}] \Rightarrow F$

- **[Negación de cuantificadores]:**

- a)  $\overline{(\exists x)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x)\overline{p(x)}$

- b)  $\overline{(\forall x)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{p(x)}$

- **[Existencia y unicidad]:** Se define el cuantificador de existencia y unicidad ( $\exists!$ ) como sigue:

$$(\exists!x)p(x) \Leftrightarrow [(\exists x)p(x)] \wedge [(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]$$

### 2.-Inducción

- **[Principio de inducción]:** Sea  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $P(n)$  una función proposicional, se tiene que la proposición:

$$\forall n \geq n_0, P(n) \tag{1}$$

Es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n)}_{\text{H.I. (débil)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

**Observación:** Este tipo de inducción también es conocida como inducción débil.

- **[Principio de inducción Fuerte]:** También tenemos que la proposición (1) es equivalente a:

$$\underbrace{P(n_0)}_{\text{Caso base}} \wedge [\forall n \geq n_0, \underbrace{P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n)}_{\text{H.I. (fuerte)}} \Rightarrow P(n+1)]$$

Esta inducción es llamada inducción fuerte pues ocupa completamente la hipótesis inductiva.

### 3.-Conjuntos

■ [Nociones básicas]:

- **Conjunto Referencia:** Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos  $E$  al conjunto de referencia, tenemos que  $x \in E$  es siempre verdad.
- **Conjunto vacío:** Se define el conjunto  $\emptyset$  como el conjunto que no posee elementos, es decir  $x \in \emptyset$  es siempre falso.

■ [Definiciones Básicas]: Sean  $A$  y  $B$  conjuntos, se define:

- **Igualdad:**  
 $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
- **Inclusión:**  
 $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- **Unión:**  
 $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
- **Intersección:**  
 $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
- **Complemento:**  
 $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
- **Diferencia:**  
 $A \setminus B := A \cap B^c$
- **Diferencia simétrica:**  
 $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

■ [Propiedades de inclusión]: Sean  $A, B, C, D \subseteq E$  conjuntos:

- a)  $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
- b)  $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- c) Si  $A \subseteq C$  y  $B \subseteq D$  entonces  $A \cap B \subseteq C \cap D$  y  $A \cup B \subseteq C \cup D$

■ [Propiedades de igualdad]: Sean  $A, B \subseteq E$  conjuntos:

- a)  $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
- b)  $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
- c)  $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
- d) **Ley de De Morgan**
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

■ [Equivalencias útiles]: Son equivalentes:

- i)  $A \subseteq B$
- ii)  $B^c \subseteq A^c$
- iii)  $A \cap B^c = \emptyset$
- iv)  $B \cup A^c = E$

■ [Producto Cartesiano]: Para  $A \subseteq E$  y  $B \subseteq F$  se define el conjunto  $A \times B$  como:  $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

■ [Algunas propiedades]: Sí  $A_1, A_2 \subseteq E$  y  $B_1, B_2 \subseteq F$  entonces:

1.  $A_1 \times \emptyset = \emptyset \times B_1 = \emptyset$
2.  $A_1 \subseteq A_2$  y  $B_1 \subseteq B_2 \implies A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$
3.  $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$
4.  $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$

■ [Conjunto potencia]: Se define el conjunto potencia (o también llamado conjunto de las partes)  $\mathcal{P}(A)$  al conjunto de todos los subconjuntos de  $A$ :

$$\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq E | X \subseteq A\}$$

**Obs. :**  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  y  $A \in \mathcal{P}(A)$  siempre.

■ [Unión e intersección de Conjuntos potencia]:

1.  $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
2.  $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

■ [Partición de conjuntos]: Llamaremos a  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(A)$  partición de  $A$  si se cumple:

- $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$
- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  si  $C_1 \neq C_2$ , entonces  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- $\mathcal{C}$  cubre  $A$ :  $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

### 4.- Funciones

■ [Definición Función]: Una función de  $A$  a  $B$  ( $f : A \rightarrow B$ ) es una 3-tupla  $f = (A, B, G)$  que satisface:

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in G$

**Obs. :** Para clarificar conceptos:

- Podemos escribir  $b = f(a)$  pues  $b$ -dado  $a$ - posee un unico valor.
- $G = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\} = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$
- $A$  es llamado dominio de  $f$  ( $Dom f$ ) y  $B$  codominio de  $f$  ( $Cod f$ ).

- **[Igualdad de Funciones]:** Si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : C \rightarrow D$  son funciones, entonces  $f = g$  si y solo si:

- $Dom f = Dom g$
- $Cod f = Cod g$
- $\forall x \in Dom f, f(x) = g(x)$

**Obs. :** Esta definición de igualdad nos dice básicamente que ambas 3-tuplas son iguales:  $(A, B, G_f) = (C, D, G_g)$

- **[Inyectividad]:** Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es inyectiva si:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

- **[Epiyectividad]:** Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es epiyectiva si:

$$\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$$

- **[Biyectividad]:** Diremos que una función  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva si es epiyectiva e inyectiva a la vez, o equivalentemente:

$$\forall y \in B, \exists! x \in A, y = f(x)$$

- **[Inversa]:** Dada  $f : A \rightarrow B$ , se define  $f^{-1} : B \rightarrow A$  como:

$$\forall x \in A, \forall y \in B, f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

**Observación:**

- $\forall x \in A, f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in B, f(f^{-1}(y)) = y$

- **[Composición]:** Dadas  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ , se define  $g \circ f$  como:

$$\forall x \in A, (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

**Observación:** La composición asocia:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- **[Propiedades con la composición]:** Dadas  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ :

- Si  $f$  y  $g$  son inyectivas (epiyectivas, biyectivas respectivamente) entonces  $g \circ f$  es inyectiva (epiyectiva, biyectiva respectivamente)
- Si  $g \circ f$  inyectiva entonces  $f$  inyectiva
- Si  $g \circ f$  epiyectiva entonces  $g$  es epiyectiva

**[Teorema de la inversa]:** Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$ . Tenemos que  $f$  es biyectiva con inversa  $g$  si se satisfacen al menos 2 de las siguientes condiciones:

- $g \circ f = id_A$
- $f \circ g = id_B$
- $g$  es biyectiva

**[Inversa de a composición]:** Si  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$  biyectivas, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- **[Conjunto Imagen]:** Sea  $f : A \rightarrow B$  función, y  $C \subseteq A$ . Se define el conjunto imagen de  $C$  por  $f$ :

$$f(C) = \{f(x) \in B \mid x \in C\}$$

- **[Equivalencia epiyectividad]:**  $f : A \rightarrow B$  es epiyectiva si y solo si  $f(A) = B$

**[Propiedades Imagen]:**

- $A \subseteq C \implies f(A) \subseteq f(C)$
- $f(A \cap C) \subseteq f(A) \cap f(C)$
- $f(A \cup C) = f(A) \cup f(C)$

- **[Conjunto Preimagen]:** Sea  $f : A \rightarrow B$  función, y  $D \subseteq B$ . Se define el conjunto preimagen de  $D$  por  $f$ :

$$f^{-1}(D) = \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

- **[Propiedades PreImagen]:**

- $B \subseteq D \implies f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(B \cap D) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(D)$
- $f^{-1}(B \cup D) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(D)$

- **[Inclusiones relevantes]:** Sea  $f : A \rightarrow B$ , con  $C \subseteq A$  y  $D \subseteq B$ , entonces:

- $C \subseteq f^{-1}(f(C))$
- $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(A)$  En particular:  $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$

- **[Inyectividad y sobreyectividad]:** Sea  $f : A \rightarrow B$  función. Se tiene:

- $f$  es inyectiva si y solo si:  

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \vee (\exists! x \in A, f^{-1}(\{y\}) = \{x\})$$

- $f$  es epiyectiva si y solo si:

$$\forall y \in B, f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

III)  $f$  si es biyectiva, entonces:

$$\forall C \subseteq B, f^{-1}(\{y\}) = (\{f^{-1}(y)\})$$

## 5.- Relaciones

- **[Relación]:** Es una tripleta  $(A, B, \mathcal{R})$  que cumple  $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ . Si  $(a, b) \in \mathcal{R}$  denotamos  $a\mathcal{R}b$
- **[Propiedades de relaciones]:** Una relación  $R$  en  $A$  es:

- **Refleja:** si  $\forall x \in A, x\mathcal{R}x$
- **Simétrica:** si  $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$
- **Antisimétrica:** si  $\forall x, y \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow y = x$
- **Transitiva:**  $\forall x, y, z \in A, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

- **[Ejemplo de relación]:** En  $\mathbb{Z}$  se define la relación divisibilidad, que se anota  $a|b$  si existe  $q \in \mathbb{Z}$  tal que  $b = qa$ .

- **[Relación de orden]:**  $\mathcal{R}$  es una relación de orden en  $A$ , si es una relación **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.

**Observación:**  $\mathcal{R}$  es un orden total si para todo  $x, y \in A$ ,  $xey$  son comparables, es decir  $x\mathcal{R}y$  o  $y\mathcal{R}x$ .

- **[Relación de equivalencia]:**  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia en  $A$ , si es una relación **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.

- **[Clase de equivalencia]:** Dado un elemento  $a \in A$  se define:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \mid a\mathcal{R}x\}$$

- **[Conjunto cociente]:** Al conjunto de las clases de equivalencia de una relación  $\mathcal{R}$  se le llama conjunto cociente, definido por:

$$A/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in A\}$$

- **[Equivalencias relevantes]:** Sea  $\mathcal{R}$  relación de equivalencia en  $A$  y  $x, y \in A$ . Son equivalentes:

- I)  $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$
- II)  $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$
- III)  $x\mathcal{R}y$
- IV)  $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$

**Obs.:** Con esto se deduce que  $A/\mathcal{R}$  es una partición de  $A$ .

- **[Congruencia modular]:** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Se define  $\mathbb{Z}$  la relación  $\equiv_n$  por:

$$a \equiv_n b \iff n|(a - b)$$

- **[Teorema de División Entera]:** Sean  $a, m \in \mathbb{Z}$  con  $m \neq 0$ . Entonces existe un único par  $q, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = q \cdot m + r$  y  $0 \leq r < |m|$ .

- **[Corolario]:**  $\mathbb{Z}_n$  ( $:= \mathbb{Z}/\equiv_n$ ) tiene  $n$  elementos:

$$\mathbb{Z}_n = \{[r]_n \mid 0 \leq r < n\}$$

## 6.- Sumatorias

- **[Sumatoria]:** Sea  $(a_i)_{i \geq m}$  secuencia de números. Para  $n \geq m$  se define la sumatoria de los términos de  $(a_i)_{i \geq m}$  por:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m & \text{si } n = m \\ a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k & \text{si } n > m \end{cases}$$

- **[Propiedades importantes]:** Se tienen las siguientes propiedades:

$$\text{I) } \sum_{k=m}^n 1 = n - m + 1$$

$$\text{II) } \sum_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=m}^n a_k$$

$$\text{III) } \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{k=m}^n b_k$$

$$\text{IV) } \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+s}^{n+s} a_{k-s} \text{ para } s \in \mathbb{Z}$$

$$\text{V) } \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^s a_k + \sum_{k=s+1}^n a_k$$

$$\text{VI) } \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$

- **[Sumas importantes]:** Algunas sumas relevantes:

$$\bullet \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ con } a \neq 1$$

- **[Índices disjuntos]:** Sea  $(a_k)_{k \in [1..n]}$  una secuencia de números reales y sean  $I, J \subseteq [1..n]$  disjuntos. Entonces:

$$\sum_{k \in I \cup J} a_k = \sum_{k \in I} a_k + \sum_{k \in J} a_k$$

Obs.:  $[1..n] = \{1, \dots, n\}$

- **[Intercambio de sumas dobles]:** Para una sumatoria doble  $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}$  cuyos **límites inferiores y superiores no dependen de los índices**, se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{kj}$$

## 7.- Conjuntos finitos

- **[Conjunto finito]:** Un conjunto  $A$  se dice finito si posee finitos elementos, es decir si  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que existe una función  $f : A \rightarrow [1..n]$ .
- **[Cardinal finito]:** Sea  $A$  un conjunto finito. Definimos el cardinal de  $A$  - denotado por  $|A|$ - como el único  $n \in \mathbb{N}$  para el que existe una enumeración  $a_1, \dots, a_n$  de  $A$ .
- **[Propiedades varias]:**
  1.  $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$
  2.  $|A| = |B| \Leftrightarrow \exists f : A \rightarrow B$  biyectiva.
  3. Si  $B$  es finito y  $A \subseteq B$ , entonces  $A$  es finito y  $|A| \leq |B|$
  4. Si  $A, B$  finitos disjuntos entonces  $|A \cup B| = |A| + |B|$
  5. Si  $B \subseteq A$  con  $A$  finito, entonces  $|A \setminus B| = |A| - |B|$ . En particular si  $|A| = |B|$  entonces  $A = B$
  6. Si  $A, B$  finitos, entonces  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .

- **[Equivalencia para funciones]:** Si  $A, B$  finitos con  $|A| = |B|$  y sea  $f : A \rightarrow B$  función. Son equivalentes:
  - $f$  es inyectiva.
  - $f$  es epiyectiva.
  - $f$  es biyectiva.

- **[Propiedad importante]:** Sean  $A, B$  conjuntos con  $B$  finito. Se tiene:
  1.  $A$  es finito y  $|A| \leq |B|$  si y solo si existe  $f : A \rightarrow B$  inyectiva.
  2.  $A$  es finito y  $|A| = |B|$  si y solo si existe  $f : A \rightarrow B$  biyectiva.

- **[Cardinal producto]:** Sean  $A, B$  conjuntos finitos, se tiene que  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- **[Conjunto de funciones]:** Sean  $A, B$  conjuntos, se define:

$$B^A := \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es función}\}$$

Además, se cumple que  $|B^A| = |B|^{|A|}$ .

- **[Cantidad de inyecciones]:** Sean  $A, B$  conjuntos tales que  $|A| = k$  y  $|B| = n$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!} &= |\{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es inyectiva}\}| \\ &= \# \text{ de } k\text{-tuplas } B^k \text{ sin repeticiones.} \end{aligned}$$

- **[Coeficiente Binominal]:** Para dos enteros  $n$  y  $k$ ,  $n \geq 0$ , se define

$$\binom{n}{k}$$

Este numero representa el numero de subconjuntos de tamaño  $k$  que posee un conjunto de tamaño  $n$ . Se verifica que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **[Propiedades relevantes]:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k} \\ \text{b) } \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

- **[Binomio de Newton]:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , entonces:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- **[Cardinal de la imagen de un conjunto]:** Si  $f : A \rightarrow B$  función, entonces  $|f(A)| \leq |A|$

## 8.- Conjuntos Infinitos

- **[Conjunto numerable]:** Un conjunto  $A$  se dira numerable si  $|A| = |\mathbb{N}|$ . En particular tenemos que  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  son numerables.

- **[Propiedades Cardinal infinito]:** Sea  $A$  conjunto infinito, entonces:

- I) Si  $A$  infinito y  $B$  finito, entonces  $|A| = |A \cup B| = |A \setminus B|$
- II)  $\forall k \in \mathbb{N}$ , existe un conjunto  $B_k$  tal que  $B_k \subseteq A$  y  $|B_k| = k$ .

- III)  $|A| \geq |\mathbb{N}|$  es decir el cardinal de los naturales es el **menor cardinal infinito**.

**Obs.:** Si  $|A| \leq |\mathbb{N}|$  entonces  $A$  es numerable.

■ **[Álgebra de numerables]:**

- i) La unión numerable o finita de conjuntos numerables o finitos  $(A_i)_{i \in I}$  (con  $I \subseteq \mathbb{N}$ ) es a lo más numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i$$

Cumple que  $|A| \leq |\mathbb{N}|$

- ii) La unión finita de conjuntos numerables  $(A_i)_{i=1}^n$  es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Es numerable.

- iii) La unión numerable de conjuntos numerables  $(A_i)_i^n$  es numerable, es decir:

$$A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Es numerable.

- iv) El producto cartesiano finito de conjuntos numerables  $(A_i)_{i=1}^n$  es numerable, es decir:

$$A := \prod_{i=1}^n A_i$$

Es numerable.

- **[Producto numerable de finitos]:** El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.

- **[Cardinal del conjunto potencia]:** El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir:  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ .

- **[Cardinal Real]:** Se tiene que  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]|$ . Esto implica que:  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$

## 9.- Estructuras algebraicas

- **[Ley de composición interna]:** Dado  $A \neq \emptyset$ . Se define una l.c.i. como:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\rightarrow x * y \end{aligned}$$

- **[Estructura algebraica]:** Si  $*$  es l.c.i. en  $A$ ,  $(A, *)$  es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i  $\Delta$  denotaremos  $(A, *, \Delta)$

**[Definiciones varias]:** Sea  $(A, *)$  estructura algebraica:

- I)  $*$  es **asociativa** si:

$$\forall x, y, z \in A, (x * y) * z = x * (y * z)$$

- II)  $e \in A$ , se dira **neutro** para  $*$  si:

$$\forall x \in A, e * x = x * e = x$$

- III) Si  $e$  neutro, y  $x \in A$ , diremos que  $x$  tiene **inverso** si existe  $y \in A$  tal que:

$$x * y = y * x = e$$

- IV)  $*$  es **conmutativa** si:

$$\forall x, y \in A, x * y = y * x$$

- v)  $a \in A$  es **absorbente** si:

$$\forall x \in A, x * a = a * x = a$$

- VI)  $a \in A$  es **idempotente** si

$$a * a = a$$

- VII)  $a \in A$  es **cancelable** si  $\forall y, z \in A$ :

$$\begin{aligned} a * y = a * z &\Rightarrow y = z \\ y * a = z * a &\Rightarrow y = z \end{aligned}$$

- VIII) Dado  $(A, *, \Delta)$  diremos que  $\Delta$  **distribuye** con respecto a  $*$  si  $\forall x, y, z \in A$  :

$$\begin{aligned} x \Delta (y * z) &= (x \Delta y) * (x \Delta z) \\ (y * z) \Delta x &= (y \Delta x) * (z \Delta x) \end{aligned}$$

- **[Cancelabilidad]:** Sea  $(A, *)$  e.a., se tiene que  $a \in A$  es cancelable si y solo si las funciones  $I_a(x) = a * x$  y  $D_a(x) = x * a$  para  $x \in A$  son inyectivas

- **[Unicidad del neutro]:** Una e.a.  $(A, *)$  posee a lo más un neutro.

- **[Unicidad del inverso]:** Si la e.a.  $(A, *)$  tiene neutro  $e$  y  $*$  es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.

- **[Propiedades varias]:** Si  $(A, *)$  es e.a. asociativa con neutro  $e$ , entonces también cumple:

- i) Si  $x \in A$  posee inverso, entonces  $x^{-1}$  también. Más aún  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

- II) Si  $x, y \in A$  poseen inversos, entonces  $x * y$  también y se tiene  $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$
- III) Si  $x \in A$  posee inverso, entonces  $x$  es cancelable.

[Estructura de funciones]: Sea  $(B, *)$  una e.a., entonces  $(B^A, *)$  será una e.a., donde si  $f, g \in B^A$  definimos  $f * g : A \rightarrow B$  por:

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

## 10.- Homomorfismos

■ [Homomorfismos]: Una función  $f : A \rightarrow B$  es un **homomorfismo** entre las estructuras algebraicas  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$  si:

$$\forall x, y \in A, f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$$

- Si  $f$  inyectiva se dirá **monomorfismo**.
- Si  $f$  es epiyectiva se dirá **epimorfismo**.
- Si  $f$  es biyectiva se dirá **isomorfismo**.
- Si  $(A, *) = (B, \Delta)$  los homomorfismos se llaman **endomorfismos**. Si son biyectivos se llaman **automorfismos**

■ [Props epimorfismos]: Si  $f : A \rightarrow B$  epimorfismo entre  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$ , entonces se tienen las siguientes propiedades:

- I) Si  $(A, *)$  es asociativa, entonces  $(B, \Delta)$  también lo es.
- II) Si  $(A, *)$  es conmutativa, entonces  $(B, \Delta)$  también lo es.
- III) Si  $e$  es neutro para  $(A, *)$ , entonces  $f(e)$  lo es para  $(B, \Delta)$ .
- IV) Si  $a$  tiene inverso  $b$  para  $(A, *)$ , entonces  $f(a)$  tiene inverso  $f(b)$  para  $(B, \Delta)$ .

■ [Props. más generales]: Sea  $f$  un homomorfismo de  $(A, *)$  a  $(B, \Delta)$ , con neutros  $e_A$  y  $e_B$ :

- I) Si  $e_B \in f(A)$ , entonces  $e_B = f(e_A)$ .
- II) Si  $e_B \in f(A)$  y  $a \in A$  tiene inverso  $b$ , entonces  $f(a)$  tiene inverso  $f(b)$ .

■ [Composición]: Si  $f : A \rightarrow B$  un homeomorfismo de  $(A, *)$  en  $(B, \Delta)$  y  $g : B \rightarrow C$  un homomorfismo de  $(B, \Delta)$  en  $(C, \bullet)$ , entonces la composición de  $f$  con  $g$ ,  $g \circ f : A \rightarrow C$ , es un homomorfismo de  $(A, *)$  en  $(C, \bullet)$ .

■ [Estructuras isomorfas]: Dos estructuras  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$  son isomorfas, denotado  $(A, *) \cong (B, \Delta)$ , si existe una función  $f : A \rightarrow B$  isomorfismo.

**Obs.:**  $\cong$  es una relación de equivalencia.

■ [Isomorfismo inverso]: Si  $f : A \rightarrow B$  es un isomorfismo entre  $(A, *)$  y  $(B, \Delta)$ , entonces  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es un isomorfismo entre  $(B, \Delta)$  y  $(A, *)$ .

[Propiedades varias]:

- I) Si  $(B, *)$  es asociativa, entonces  $(B^A, *)$  también.
- II) Si  $(B, *)$  es conmutativa, entonces  $(B^A, *)$  también.
- III) Si  $(B, *)$  tiene neutro  $e$ , entonces  $f \in (B^A, *)$  dado por  $f(x) = e$  (función constante) es neutro de  $(B^A, *)$

■ [Estructura de pares ordenados]: Sean  $(A_1, *_1)$  y  $(A_2, *_2)$  e.a., se define la l.c.i.  $\otimes$  sobre  $A_1 \times A_2$  por: Para  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ :

$$(a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$

[Propiedades varias]:

- I) Si  $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$  son asociativas, entonces  $(A_1 \times A_2, \otimes)$  también.
- II) Si  $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$  son conmutativas, entonces  $(A_1 \times A_2, \otimes)$  también.
- III) Si  $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$  poseen neutros  $e_1$  y  $e_2$ , entonces  $(A_1 \times A_2, \otimes)$  posee neutro  $(e_1, e_2)$
- IV) Si  $a_1, a_2$  poseen inversos  $b_1, b_2$  en  $(A_1, *_1), (A_2, *_2)$ , entonces  $(a_1, a_2)$  posee inverso  $(b_1, b_2)$  en  $(A_1 \times A_2, \otimes)$ .

## 11.- Grupos

■ [Grupo]: Sea  $(G, *)$  una e.a., diremos que:

- Es **grupo** si  $*$  es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
- Es **grupo abeliano** si es grupo y  $*$  es conmutativa.

[Propiedades grupos]: Sea  $(G, *)$  grupo, entonces:

- I)  $\forall a, b \in G, a * x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1} * b$   
 $\forall a, b \in G, x_2 * a = b \Leftrightarrow x_2 = b * a^{-1}$   
 Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.
- II)  $\forall a \in G$  las funciones  $I_a(x) = a * x$  y  $D_a(x) = x * a$  son biyectivas.
- III) El único elemento idempotente es el neutro.
- IV) Si  $(K, \Delta)$  una e.a. y  $f : G \rightarrow K$  homomorfismo, entonces  $(f(G), \Delta)$  es grupo.

v) Si  $(K, \Delta)$  una e.a., un homomorfismo  $f : G \rightarrow K$  es monomorfismo (inyectivo) si y solo si  $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$

▪ **[Grupos importantes]:**

- Si  $(G, *)$  es grupo (abeliano) y  $A \neq \emptyset$ , entonces  $(G^A, *)$  es grupo (abeliano)
- Si  $(G_1, *_1), (G_2, *_2)$  son grupos (abelianos), entonces  $(G_1 \times G_2, \otimes)$  es grupo (abeliano).

▪ **[Subgrupo]:** Sea  $(G, *)$  grupo y  $\emptyset \neq H \subseteq G$ . Diremos que  $H$  es subgrupo de  $G$  si  $(H, *)$  es grupo.

▪ **[Propiedades subgrupos]:**

1. Si  $e \in G$  es el neutro de  $G$  y  $e_H \in H$  es neutro de  $H$  entonces  $e = e_H$ .
2. Además, sea  $x \in H$ .  $x^{-1} \in G$  es el inverso de  $x$  en  $(G, *)$ , y  $\bar{x}$  es el inverso de  $x$  en  $(H, *)$ . Entonces  $x^{-1} = \bar{x}$ .

▪ **[Caracterización Subgrupos]:** Sea  $H \neq \emptyset$ . Entonces:

$$(H, *) \text{ es subgrupo de } (G, *) \Leftrightarrow \forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$$

▪ **[Subgrupo imagen]:** Sea  $(G, *)$  grupo,  $(K, \Delta)$  una estructura algebraica y  $f : G \rightarrow K$  un morfismo. Si  $H$  es subgrupo de  $(G, *)$ , entonces  $f(H)$  es subgrupo de  $(f(G), \Delta)$ .

▪ **[Traslación]:** Sea  $H$  subgrupo de  $(G, *)$ . Definimos traslación de  $H$  en  $a \in G$  por la izquierda como:

$$a * H = \{a * h \mid h \in H\}$$

▪ **[Cardinal traslación]:** Sea  $H$  subgrupo de  $(G, *)$ , el conjunto de las traslaciones de  $H$  particiona  $G$ , además el cardinal de cada traslación coincide con el de  $H$  ( $\forall a \in G, |a * H| = |H|$ )

▪ **[Lagrange]:** Si  $(H, *)$  es subgrupo del grupo finito  $(G, *)$ , entonces  $|H|$  divide a  $|G|$ .

---

## 12.- Anillos y Cuerpos

---

▪ **[Anillo]:** Una e.a.  $(A, +, \cdot)$  se llamará anillo si:

- $(A, +)$  es grupo abeliano.
- $\cdot$  es asociativa y posee elemento neutro en  $A \setminus \{0\}$ .
- $\cdot$  distribuye con respecto a  $+$ .

En el caso de ser  $\cdot$  conmutativo,  $(A, +, \cdot)$  será anillo conmutativo.

▪ **[Morfismos de anillos]:**  $f : A \rightarrow B$  Será morfismo entre dos anillos  $(A, +, \cdot)$  y  $(B, +, \cdot)$  si:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y) \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

▪ **[Algebra en anillos]:** Si  $(A, +, \cdot)$  es anillo y  $x, y \in A$ :

- $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
- $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
- $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- $-x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$

▪ **Algebra de anillos]:** Sea  $(A, +, \cdot)$  un anillo conmutativo.

1.  $\forall k, l \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in A, k(a + b) = ka + kb, (k + l)a = ka + la$  y  $(ka)(lb) = (kl)(ab)$

2.  $\forall x, y \in A, \forall n \in \mathbb{N}, (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

3.  $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^n x^k$

▪ **[Divisores de cero y dominio de integridad]:** Sea  $(A, +, \cdot)$  un anillo. Un elemento  $a \neq 0$  es divisor de 0 si  $\exists y \neq 0$  tal que  $a \cdot y = 0$  o  $y \cdot a = 0$ .

A un anillo conmutativo y sin divisores de 0 lo llamaremos dominio de integridad.

▪ **[Propiedad]:** Si  $(A, +, \cdot)$  anillo, entonces:

$a$  es cancelable en  $(A, \cdot) \Leftrightarrow a$  no es divisor de cero

▪ **[Cuerpo]:** Una estructura  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  se llamará cuerpo si:

- $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es anillo conmutativo.
- Todo elementos en  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  es invertible para  $\cdot$ .

Equivalentemente  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  sera cuerpo si y solo si:

- $(\mathbb{K}, +)$  es grupo abeliano.
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  es grupo abeliano.
- $\cdot$  distribuye con respecto a  $+$ .

▪ **[Caracterización cuerpos finitos]:** Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es cuerpo, entonces  $\mathbb{K}$  no tiene divisores de 0 ( $\mathbb{K}$  es dominio de integridad).

El reciproco se tiene si  $|\mathbb{K}|$  es finito, es decir:



Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es dominio de integridad con  $|\mathbb{K}|$  finito, entonces  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es cuerpo.

### 13.- Numeros Complejos

▪ **[Formalidad]:** Identificamos  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , de manera que se definen las operaciones  $+$  y  $\cdot$  para  $z = (a, b), w = (c, d) \in \mathbb{C}$  por:

$$\begin{aligned} z + w &= (a + c, b + d) \\ z \cdot w &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

▪ **[Unidad Imaginaria]:** Se define  $i = (0, 1)$

▪ **[Forma cartesiana]:** La expresión  $a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  es la forma cartesiana de  $z = (a, b)$ .

Ademas se define:

- $Re(z) = a$  (Parte real)
- $Im(z) = b$  (Parte imaginaria)

▪ **[Coordenadas Polares]:** Para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  se define el par  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$  donde:

- $r$  es la distancia de  $z$  al origen, se llama modulo de  $z$  y se anota  $r = |z|$ .
- $\theta$  es el angulo que se forma entre el eje  $X$  (real) y el segmento que une el origen con  $z$ . Se llama argumento (principal) de  $z$  y se anota  $arg(z)$ .

▪ **[Forma polar]:** Para  $\theta \in \mathbb{R}$  anotamos  $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ . La expresión  $|z|e^{iarg(z)}$  es la forma polar de  $z$ .

▪ **[Props varias]:**

- I)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha+\beta}$
- II)  $|zw| = |z| \cdot |w|$
- III)  $arg(zw) \equiv arg(z) + arg(w) \pmod{2\pi}$
- IV)  $|z^k| = |z|^k$
- V)  $(e^{i\theta})^k = e^{i(k\theta)}$

▪ **[Conjugado]:** Sea  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , se define  $\bar{z} = a - bi$

▪ **[Función Conjugado]:** La conjugación es un automorfismo en  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , es autoinversa y restringida a  $\mathbb{R}$  es la identidad.

▪ **[Desigualdad triangular]:** Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

▪ **[Raices]:** Sean  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $n \geq 2$ . Diremos que  $z$  es una raíz  $n$ -ésima de  $w$  si  $z^n = w$ .

▪ **[Soluciones]:** Sean  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $n \geq 2$ , si  $w = re^{i\theta}$  (forma polar) entonces la ecuación  $z^n = w$  tiene  $n$  soluciones, dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{(\theta+2\pi k)}{n}}$$

▪ **[Prop]:** Sean  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y  $n \geq 2$ , entonces la suma de las raíces  $n$ -ésimas vale 0:

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$$

▪ **[Muchas propiedades]:** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$

- a)  $\bar{\bar{z}} = z$ .
- b)  $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$ .
- c)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$  y  $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$ .
- d)  $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$ . Si  $w \neq 0$   $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ .
- e) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ .
- f)  $Re(z) = Re(\bar{z})$  y  $Im(z) = -Im(\bar{z})$ .
- g)  $Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  y  $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- h) Si  $z \neq 0$ , entonces  $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-iarg(z)}$
- i)  $|z| = |\bar{z}|$
- j)  $arg(\bar{z}) = 2\pi - arg(z)$
- k)  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- l) Si  $z \neq 0$ , entonces  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .
- m) Si  $w \neq 0$ , entonces  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ .

### 14.- Polinomios

▪ **[Polinomio]:** Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  cuerpo, llamamos polinomio en  $\mathbb{K}$  (denotado  $p \in \mathbb{K}[x]$ ) a una función:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \end{aligned}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_k \in \mathbb{K}$  constantes.

▪ **[Igualdad de polinomios]:** Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  y  $q \in \mathbb{K}[x]$  con  $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  y  $q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$  entonces:

$$p = q \iff (n = m \wedge \forall k \in \{0, \dots, n\}, p_k = q_k)$$

▪ **[Grado]:** Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  con  $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  llamamos  $gr(p) = n$  con  $n$  el mayor numero tal que  $p_n \neq 0$ . Si  $p(x) = 0$  definimos  $gr(P) = -\infty$ .

**Obs.:** Si  $p_n = 1$ ,  $p$  se dira polinomio mónico.

- **[Anillo de polinomios]:** Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es cuerpo, entonces  $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$  es anillo conmutativo que no posee divisores de 0.

- **[Suma y producto de polinomios]:** Si  $p, q \in \mathbb{K}[x]$  con  $gr(p) = n$  y  $gr(q) = m$  entonces  $gr(p + q) \leq \max\{n, m\}$  con:

$$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} (p_k + q_k)x^k$$

Además  $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$ .

- **[Inversos]:** En  $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$  los únicos polinomios con inversos son los de grado 0.
- **[Teorema de la División]:** Sean  $p, d \in \mathbb{K}[x]$  con  $d \neq 0$ . Entonces existe un único par  $q, r \in \mathbb{K}[x]$  tal que

1.  $p = q \cdot d + r$
2.  $gr(r) < gr(d)$

**Obs.:** A  $q$  se le llama cociente, a  $r$  resto, y  $d$  divisor de  $p$  con resto  $r$ .

- **[Teorema del resto]:** Sea  $p \in \mathbb{K}[x]$  y  $c \in \mathbb{K}[x]$  y  $c \in \mathbb{K}$ . El resto de dividir  $P$  por el polinomio  $(x - c)$  es exactamente  $p(c)$
- **[Raíz]:**  $c \in \mathbb{K}$  es raíz de  $p \in \mathbb{K}[x]$  si  $p(c) = 0$ .
- **[Prop raíces]:**  $c \in \mathbb{K}$  es raíz de  $p \in \mathbb{K}[x] \Leftrightarrow (x - c) | p(x)$  (el resto es 0).  
Definimos  $\mathcal{Z}(p)$  como el conjunto de raíces de  $p$ .
- **[Prop varias]:**
  1. Si  $c_1, c_2, \dots, c_k$  raíces distintas de  $p$  entonces  $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) | p(x)$ .

2. Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  con  $gr(p) = n \geq 1$  entonces  $p$  posee a lo más  $n$  raíces distintas.
3. Sean  $n \geq 0$  y  $p, q \in K[x]$  con  $gr(p) \leq n$  y  $gr(q) \leq n$ . Si  $p$  y  $q$  coinciden en  $n + 1$  puntos, entonces son iguales.

- **[TFA (D'Alembert)]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$  entonces  $p$  posee al menos una raíz en  $\mathbb{C}$ .  
Se deduce mediante esto que el polinomio  $p$  debe poseer  $n$  raíces en  $\mathbb{C}$ .

- **[Factorización compleja]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$  entonces existen  $\alpha, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$  y naturales  $l_1, \dots, l_m \geq 1$  tales que  $gr(p) = l_1 + \dots + l_m$  y:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \dots (x - c_m)^{l_m}$$

- **[Raíz conjugada]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  tiene todos sus coeficientes reales, y  $z \in \mathbb{C}$  es raíz de  $P$  entonces  $\bar{z}$  es también raíz de  $p$ .

- **[Factorización real]:** Si  $p \in \mathbb{R}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$ , entonces existen  $\alpha, c_1, \dots, c_m, p_1, q_2, \dots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$  tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1) \dots (x - c_m)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s)$$

Donde  $c_k$  son las raíces del polinomio y  $(x^2 + p_1x + q_1), \dots, (x^2 + p_sx + q_s)$  no tienen raíces reales, y  $\alpha = p_n$  en  $p$ .

- **[Coeficientes enteros]:** Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$ . si  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  ( $r$  y  $s$  primos relativos) es una raíz de  $p$  entonces  $r | p_0$  y  $s | p_n$ .

- **[Ultima propiedad]:** Si  $p \in \mathbb{R}[x]$  es mónico, con coeficientes  $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$  entonces toda raíz racional de  $p$  es entera y divide a  $p_0$ .