Resumen

- **[Producto numerable de finitos]**: El producto de una familia numerable de conjuntos finitos de tamaño dos no es numerable.
- **[Cardinal del conjunto potencia]**: El cardinal del conjunto potencia de un conjunto es mayor que el cardinal del conjunto, es decir: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.
- **[Cardinal Real]**: Se tiene que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1]|$. Esto implica que: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |[0,1]| = |\mathbb{R}|$
- **[Ley de composición interna]**: Dado $A \neq \emptyset$. Se define una l.c.i. como:

$$* : \begin{array}{ccc} A \times A & \to & A \\ (x,y) & \to & x * y \end{array}$$

- **[Estructura algebrica]**: Si $*$ es l.c.i. en A, $(A,*)$ es llamado estructura algebraica. Si existe otra l.c.i Δ denotaremos $(A,*,\Delta)$
- **[Definiciones varias]**: Sea $(A,*)$ estructura algebrica:

  I) $*$ es **asociativa** si:

  $$\forall x,y,z \in A, (x*y)*z = x*(y*z)$$

  II) $e \in A$, se dira **neutro** para $*$ si:

  $$\forall x \in A, e*x = x*e = x$$

  III) Si e neutro, y $x \in A$, diremos que x tiene **inverso** si existe $y \in A$ tal que:

  $$x*y = y*x = e$$

  IV) $*$ es **conmutativa** si:

  $$\forall x,y \in A, x*y = y*x$$

  V) $a \in A$ es **absorbente** si:

  $$\forall x \in A, x*a = a*x = a$$

  VI) $a \in A$ es **idempotente** si

  $$a*a = a$$

  VII) $a \in A$ es **cancelable** si $\forall y,z \in A$:

  $$a*y = a*z \Rightarrow y = z$$
  $$y*a = z*a \Rightarrow y = z$$

  VIII) Dado $(A,*,\Delta)$ diremos que Δ **distribuye** con respecto a $*$ si $\forall x,y,z \in A$:

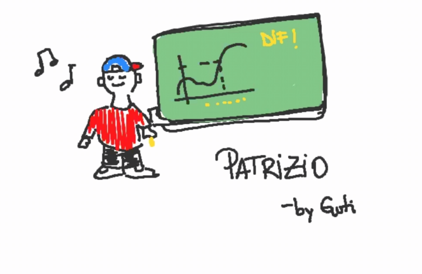
  $$x\Delta(y*z) = (x\Delta y)*(x\Delta z)$$
  $$(y*z)\Delta x = (y\Delta x)*(z\Delta x)$$

- **[Cancelavilidad]**: Sea $(A,*)$ e.a., se tiene que $a \in A$ es cancelable si y solo si las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ para $x \in A$ son inyectivas
- **[Unicidad del neutro]**: Una e.a. $(A,*)$ posee a lo más un neutro.
- **[Unicidad del inverso]**: Si la e.a. $(A,*)$ tiene neutro e y $*$ es asociativa, entonces los inversos (en el caso en que existan) son únicos.
- **[Propiedades varias]**: Si $(A,*)$ es e.a. asociativa con neutro e, entonces también cumple:

  I) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x^{-1} también. Más aún $(x^{-1})^{-1} = x$.

  II) Si $x,y \in A$ poseen inversos, entonces $x*y$ también y se tiene $(x*y)^{-1} = y^{-1}*x^{-1}$

  III) Si $x \in A$ posee inverso, entonces x es cancelable.



lo importante para este tipo de problemas es tener claro la diferencia entre un conjunto numerable y un conjunto no numerable.
el conjunto numerable será tal que que se puede encontrar una biyección hacia el conjunto de los naturales.
el conjunto no numerable será de una cardinalidad mayor.
además debemos diferenciar entre conjuntos finitos y conjuntos infinitos.

P1. Sean A, B, C tres conjunto infinitos tales que:

$$A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset \text{ y } |B| = |C|.$$

(a) ¿Qué relación hay entre $|A \cup B|$ y $|A \cup C|$?

(b) ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?

(c) ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

En todos los casos, demuestra tus afirmaciones.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

a) Defino una función entre $A \cup B$ y $A \cup C$, sea

$$u : A \cup B \to A \cup C$$
$$x \to \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Defino esta función de esta manera para que todo elemento en su dominio tenga dónde llegar, en su defecto si vivo en el conjunto A entregaré la identidad de dicho elemento .
Pero si vivo en el conjunto B entregaré la imagen de ese elemento ,además sé que existe la función "f" que irá desde el conjunto B a C, dado que tengo igual cardinalidad entre el conjunto B y el conjunto C, lo que quiere decir es que existe una función biyectiva definida del conjunto B a C

Veamos que es inyectiva ¿Qué es ser inyectiva? :)
En efecto $x,y \in A \cup B \wedge u(x) = u(y)$ como hipótesis.

$\forall x,y \in Dom(g)$
si $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y$
recuérdo: inyectividad

estar en la unión de dos conjuntos se remite a estudiar tres casos posibles
1)Un caso sería que x e y pertenezcan a A
2)Otro caso sería que x ,e y pertenezcan al conjunto B
3)El otro caso sería que x pertenezca al conjunto A y que y pertenezca Al conjunt

1) Si $x,y \in A \wedge u(x) = u(y)$
como $x \in A$ $u(x) = x$
como $y \in A$ $u(y) = y$
luego por transitividad de la igualdad
$x = u(x) = u(y) = y$ luego $x = y$
$\therefore$ si $x,y \in A$ u es inyectiva.

2) $x,y \in B \wedge u(x) = u(y)$ luego como $x \in B$ $u(x) = f(x)$, además como $y \in B \Rightarrow u(y) = f(y)$.
Luego por transitividad de la igualdad $f(x) \overset{\text{Def } x\in B}{=} u(x) \overset{\text{Hipótesis}}{=} u(y) \overset{\text{Def } x\in B}{=} f(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$
Luego como f es bigectiva $\Rightarrow$ si $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ ya que en particular es f inyectiva (Por qué f es bigectiva? Porque $|B| = |C|$, luego $\exists f : B \to C$ biyectiva, por su igual cardinalidad, además spg $Dom(f) = B$, pues si fuera C, son variables mudas. $\therefore$ u inyectiva si $x,y \in B$.

3) si $x \in A \wedge y \in B \wedge u(x) = u(y)$, notar que x,y son variables mudas Por lo cual puedo decir qué una está en un conjunto o bien el otro sin pérdida de generalidad(otro caso será analogo)

si $x \in A \Rightarrow u(x) = x \in A$ por otra parte

si $y \in B \Rightarrow u(y) = f(y) \in C$, luego por hipótesis $x = u(x) = u(y) = f(y) \Rightarrow x = f(y)$, con $x \in A$, $f(y) \in C \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

Luego como este caso no ocurre dado que por hipótesis del enunciado $A \cap C = \emptyset$.

$\therefore u : A \cup B \to A \cup C$ será inyectiva en todo su dominio pues vimos que 1) y 2) es inyectiva y el caso 3) no ocurre.

$$x \to \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Luego u es inyectiva pues en todo su dominio $\forall x, y \in Dom(u) = A \cup B$, si $u(x) = u(y) \Rightarrow x = y$.

- Veamos que es sobreyectiva, por definición recuerdo sobreyectividad: $\forall y \in H, \exists x \in G$ tq $g(x) = y$, $g : G \to H$

por lo que tomo un elemento arbitrario en el codominio de $u : A \cup B \to A \cup C$, lo que sería tomar $\bar{x} \in A \cup C$, como estoy en una unión

1) Caso 1: $\bar{x} \in A$ luego necesitamos un x tq $u(x) = \bar{x}$, con $x \in A \cup B$, si tomo $x = \bar{x}$, pues $x \in A \Rightarrow u(x) = x$ por definición. de la función u.

Como obtuvimos $x \in A \cup B$ y fue arbitrario $\Rightarrow \forall \bar{x} = y \in A, \exists x \in A \cup B$ tq $u(x) = \bar{x} = y$ luego es sobreyectiva.

notar que la intuición nos debe decir que debemos encontrar el elemento en El dominio de la función, tal que se cumpla la igualdad. En este caso que la imagen a través de la funcion me entregué el elemento arbitrario en A∪ C

Notemos que tenemos una dependencia por los cuantificadores lógicos y su orden en este caso primero tenemos el para todo y luego tenemos el existe ,por lo que su existencia depende de del término arbitrario , para nuestro caso $\bar{x}$

Caso 2: $\bar{x} \in C$, $u(x) = \bar{x}$ luego necesitamos alguien $x \in A \cup B$ que lo genere (def sobreyectividad), ie $u(x) = \bar{x}$

luego si $x = f^{-1}(\bar{x})$, la cual existe pues f biyectiva, es más $f^{-1}(\bar{x}) \in B$ por definición de f,

luego $\Leftrightarrow f^{-1}(\bar{x}) \in B \Rightarrow$ si $y \in B \Rightarrow u(y) = f(y)$, Para nuestro caso $f^{-1}(\bar{x}) \in B \Rightarrow u(f^{-1}(\bar{x})) = f(f^{-1}(\bar{x})) = \bar{x}$ ya que f biyectiva.

, luego sabíamos $\bar{x} \in C \Rightarrow \bar{x} \in A \cup C$, lo que quiere decir $u(x) = x$.

$\Rightarrow$ por Caso 1) y 2) $u(x)$ es sobreyectiva

- Luego por parte anterior inyectividad + sobreyectividad = Biyectividad,

$$\Rightarrow \exists\, u : A \cup B \to A \cup C \text{ función}$$

$$x \to \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ f(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

la idea de este ejercicio fue definir una función conveniente ,ya que con la existencia de esta función biyectiva esto va a ser equivalente a probar que el conjunto A ∪ B tenía igual cardinal con el conjunto A∪ C $\Leftrightarrow |A \cup B| = |A \cup C|$

(b) ¿Y qué se puede decir si $|B| \leq |C|$?

veamos que la intuición nos debe decir que no tendremos condiciones suficientes para la biyectividad. Pues si el cardinal del conjunto C es mayor o igual que el cardinal del conjunto B podemos ver que basta A y B numerable y además de esto C no numerable , con esto perdemos las sobreyectividad en particular la biyectividad.

$$\underset{\text{numerable}}{|\overset{\text{numerable}}{A} \cup \overset{\text{numerable}}{B}|} \leq |A \cup \overset{\text{no numerable}}{C}|$$

(c) ¿Y si $A \cap B = \{x_0\}$?

Veamos que dado $A \cap B = \{x_0\}$ (singleton), Notemos que sea $\bar{B}$ de cardinal infinito, luego $|\bar{B}| = |\bar{B} \setminus A|$, si $|A|$ finito, donde $|\bar{B} \setminus A|$ es infinito.

- Luego $\bar{B} = B \setminus \{x_0\}$ infinito, pues $|\{x_0\}|$ finito y $|B|$ inf por enunciado.
- Luego $A \cap B = x_0 \Rightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$, por enunciado $A \cap C = \emptyset$

y por hipótesis $|C| \underset{\text{Hip.}}{=} |B| \underset{\text{recien}}{=} |\bar{B}|$

Podemos notar que $A \cup B = A \cup \bar{B}$, pues $\{x_0\} \in B \wedge \{x_0\} \in A$.

- Luego $|A \cup \bar{B}| = |A \cup B| = |A \cup C|$ a)
- Luego $|A \cup \bar{B}| = |A \cup B| \leq |A \cup C|$ b)

P2. a) Determine la cardinalidad del conjunto $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$.

b) Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

I Intuición:
II Teoría:
III Matraca:

I)tenemos dos opciones a priori para la cardinalidad del conjunto,es decir ,que este tenga la cardinalidad de los naturales o bien tenga la cardinalidad de los números reales, luego la intuición nos dice que tendremos que hacer una doble desigualdad respecto a los cardinales de los conjuntos que ya conocemos para poder determinar la cardinalidad del conjunto dado.
II)Saber qué ocurre con el producto finito de conjuntos de cierta cardinalidad y además entender Cómo funciona el conjunto dado.
III)por otra parte la matraca será trabajar la característica del conjunto entregado para así poder llevar esto al plano donde trabajamos La cardinalidad de conjuntos

Sea $A := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = m\}$

¿Problema? La cerradura del conjunto.

1) Notemos que $(-1312, 1312, m) \in A$, $\forall m \in \mathbb{N}$, pues $-\cancel{1312} + \cancel{1312} + m = m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ (podré formar todos los naturales) al menos tendremos la cardinalidad de $\mathbb{N}$

$\Rightarrow |A| \geq |\mathbb{N}|$ mayor o igual a la de los naturales

2) Veamos ahora que $|A| \leq |\mathbb{N}|$, sea $(x_1, x_2, x_3) \in A \Leftrightarrow x_1 = m - x_2 - x_3$, luego como $m, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ por cerradura de los enteros $x_1 \in \mathbb{Z}$, para Para poder ser parte del conjunto x_1 debe ser entero.

Luego $\vec{a} \in A \Rightarrow \vec{a} := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lo cual Es numerable, por propiedad de que Producto finito de conjuntos numerables es numerable. luego $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Es numerable.

• Por otra parte $A \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ porque todo elemento de A será parte de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por cerradura. Luego $|A| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

$\therefore |A| = |\mathbb{N}|$ por doble desigualdad de cardinales.

b) Demuestre que si X es infinito y $x \in X$ entonces $|X| = |X \setminus \{x\}|$.

Supondremos X numerable

cuando trabajó con un conjunto numerable me entrega buenas propiedades ,en su defecto puedo tener una función biyectiva al conjunto de los naturales lo que se traduce en poder enumerar los elementos de este conjunto, para este caso nos definiremos la función explícita que permita enumerar todos los elementos del conjunto y con esto poder tener la función biyectiva lo que se traduce a una igualdad de cardinales.

Luego $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots\} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$

y diremos $x_i = x$, el elemento que queremos sacar

La función que busco será $f: \mathbb{N} \to X$, $m \to x_m$ $\to$ lo que se traduce

$0 \to x_0$
$1 \to x_1$
$2 \to x_2$
$\vdots$
$i \to x_{i+1}$
$i+1 \to x_{i+2}$

DESDE ACÁ CAMBIA PUES $x_i = x$ LO SACAMOS.

Como definimos esta noción formalmente?

$$f: \mathbb{N} \to X \setminus \{x\}, \quad m \to \begin{cases} x_m & \text{si } m < i \\ x_{m+1} & \text{si } m \geq i \end{cases}$$

luego nos queda verificar que Es biyectiva y ganamos, pues su cardinalidad será la de $\mathbb{N}$.

Inyectividad: $\forall x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

la función fue definida índice a índice, no se repite.

Veamos
1) si: $x, y < i \wedge f(x) = f(y) \Rightarrow x_x = f(x) = f(y) = x_y$, $x, y \in \mathbb{N}$ luego $x_x = x_y \Rightarrow x = y$
2) si $x, y \geq i \wedge f(x) = f(y) \Rightarrow x_{x+1} = f(x) = f(y) = x_{y+1}$, $x, y \in \mathbb{N}$ luego $x_{x+1} = x_{y+1} \Rightarrow x+1 = y+1$, $x = y$
3) $x < i$, $y \geq i \wedge f(x) = f(y) \Rightarrow x_x = f(x) = f(y) = x_{y+1}$, $x, y \in \mathbb{N}$ luego $x_x = x_{y+1} \Rightarrow x = y+1$ ✗

Luego el caso 3) no ocurre, y f es inyectiva.

Sobreyectiva. $\forall y \in \text{Codominio}$, $\exists x \in \text{Dominio}$ tq $f(x) = y$

En su defecto, $\forall y \in X \setminus \{x\}$, $\exists x = \bar{n}$ tq si: 1) $n < i \Rightarrow \bar{n} = n$ tq $f(n) = x_n = y$ (existe ✓)
$y = x_n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{i\}$ 2) $n \geq i \Rightarrow \bar{n} = n - 1$ tq $f(n-1) = x_n = y$

Luego es Epiyectiva

$\therefore$ Existe función f biyectiva, sigue $|\mathbb{N}| = |X \setminus \{x\}|$ //

P3. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene una función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f_0 = id_{\mathbb{R}}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y definimos

$$B = \{f_n(a) \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A\}.$$

Demuestre que si A es un conjunto numerable entonces B también es numerable.

Como A es numerable $\exists \phi : \mathbb{N} \to A$, ϕ biyectiva. Luego podemos escribir B gracias a esta función, luego $B = \{f_m(\phi(j)) \mid m \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ Veamos $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to B$ la cual será epiyectiva

$$(m, j) \to f_m(\phi(j))$$

por construcción, pues para todo elemento y en B, existirán elementos $(m, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tq $f_m(\phi(j)) = y$, luego para cada imagen hay un par de naturales que lo generan. Esto equivale $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| \geq |B|$, pero producto finito de numerable es numerable. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| > |B|$, luego se sabe que B es infinito, entonces al menos tiene cardinalidad de naturales $\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |B|$ luego por doble desigualdad. $|\mathbb{N}| = |B|$

notar que para este problema nos afirmamos de que la función f_n estaba bien definida ,en su defecto existía para cada n en los naturales .
luego con esto podríamos Definir la funcion ϕ la cual También estaría bien definida.
A partir de esto por Cómo se construye esta función sería epiyectiva, pues para cada elemento en la imagen habría un elemento en El dominio que lo generaría, dígase estos elementos como pares ordenados, además usamos el argumento de que cómo B es infinito al menos debe tener la cardinalidad de los números naturales ,pues es el conjunto infinito más pequeño.

P4. Dado un conjunto no vacío A, sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A \mid f \text{es biyectiva}\}$. Se define la operación $*$ de la siguiente manera:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f * g = (f \circ g)^{-1}.$$

(a) Pruebe que $*$ es una ley de composición interna.

(b) Estudie la asociatividad de $*$.

(c) Estudie la conmutatividad de $*$.

(d) Encuentre el elemento neutro de $*$.

(e) Estudie la existencia de elementos inversos en $\mathcal{F}$.

I Intuición:

II Teoría:

III Matraca:

Veamos que $f * g$ se define con $f, g \in \mathcal{F}$, luego $f, g : A \to A$ biyectivas.

a) $f * g = (f \circ g)^{-1}$ como f, g biyectivas $f^{-1} : A \to A$, $g^{-1} : A \to A$

Propiedad inversa composición $= g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1}(f^{-1}(x))$, $x \in A$, $f^{-1}(x) : A \to A$, $x \in A$, $g^{-1} : A \to A$, $f^{-1}(x) \in A$, luego $g^{-1}(f^{-1}(x)) \in A$.

por lo que hay cerradura y es lci

hecho por cómo está definida la operación * no tendría sentido que no fuera biyectiva, la función g dado que se le toma la inversa para poder calcular la operación *, además de esto debe estar bien definida en su conjunto de partida y su conjunto de llegada, para poder evaluar en f la función g que debe llegar al conjunto A.

b) Asociatividad: Veremos si: $(f * g) * h = f * (g * h)$, $f, g, h \in \mathcal{F}$

$(f*g)*h$	$f*(g*h)$
$= (f \circ g)^{-1} * h$	$= f * (h^{-1} \circ g^{-1})$
$= (g^{-1} \circ f^{-1}) * h$	$= (g \circ h) \circ f^{-1}$
$= ((g^{-1} \circ f^{-1}) \circ h)^{-1}$	$= (g \circ h)(f^{-1}(x))$
$= h^{-1} \circ (f \circ g) = h^{-1}(f(g(x)))$	

Luego son diferentes

$\therefore$ No es Asociativa

Cabe mencionar que cada una de las funciones es biyectiva dado que pertenecen al conjunto F cuatica luego su inversa está bien definida.

c) Sea $f, g \in \mathcal{F}$

$f * g = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} = g * f$ $\therefore$ No es commutativa.

Donde usted propiedades de inversa de la composición definición de composición

d) $f * e = f = (f \circ e)^{-1} = e^{-1} \circ f^{-1}$, si $e^{-1} = f \circ f \Rightarrow e^{-1} \circ f^{-1} = f$, candidato e^{-1} e intuición: pero no sería neutro porque depende de f.

$\therefore$ No existe neutro.

El elemento neutro es único para todos los elementos del conjunto, en este caso nuestro candidato depende de la función f por lo que no podría ser elemento neutro, ya que no sería Útil para todos los elementos en el conjunto A distintos a f

Veamos [Formalidad]

$$
\begin{aligned}
f * e = f &\iff (f \circ e)^{-1} = f && \text{def } * \\
&\iff e^{-1} \circ f^{-1} = f \quad / \circ f && \text{compongo } f \\
&\iff e^{-1} \circ f^{-1} \circ f = f \circ f && f^{-1} \circ f = Id_A \text{, pues funciones biyectivas} \\
&\iff e^{-1} \circ Id_A = f \circ f && \\
&\iff e^{-1} = f \circ f \quad / ()^{-1} && \text{tomo inversa} \\
&\iff e = (f \circ f)^{-1} && \text{Inversa de la composición, } (e^{-1})^{-1} = e \ (e \in \mathcal{F} \text{, i.e biyectiva}) \\
&\iff e = f^{-1} \circ f^{-1} &&
\end{aligned}
$$

, depende de f

luego no hay neutro!

e) $f * \bar{f} = e$ no existe elemento neutro, menos inverso

//