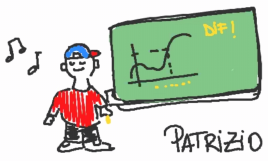
Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Resumen

- **[Subgrupo]**: Sea $(G,*)$ grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H,*)$ es grupo.
- **[Propiedades subgrupos]**:
  1. Si $e \in G$ es el neutro de G y $e_H \in H$ es neutro de H entonces $e = e_H$.
  2. Además, sea $x \in H$. $x^{-1} \in G$ es el inverso de x en $(G,*)$, y $\overline{x}$ es el inverso de x en $(H,*)$. Entonces $x^{-1} = \overline{x}$.
- **[Caracterización Subgrupos]**: Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

  $(H,*)$ es subgrupo de $(G,*) \Leftrightarrow \forall x,y \in H,\ x*y^{-1} \in H$
- **[Subgrupo imagen]**: Sea $(G,*)$ grupo, (K,Δ) una estructura algebraica y $f: G \longrightarrow K$ un morfismo. Si H es subgrupo de $(G,*)$, entonces $f(H)$ es subgrupo de $(f(G),\Delta)$.
- **[Lagrange]**: Si $(H,*)$ es subgrupo del grupo finito $(G,*)$, entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- **[Anillo]**: Una e.a. $(A,+,\cdot)$ se llamara anillo si:
  - $(A,+)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ es asociativa y posee elemento neutro en $A \setminus \{0\}$.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.

  En el caso de ser $\cdot$ conmutativo, $(A,+,\cdot)$ será anillo conmutativo.
- **[Morfismos de anillos]**: $f: A \to B$ Sera morfismo entre dos anillos $(A,+,\cdot)$ y $(B,+,\cdot)$ si:

  $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
  $$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
  $$f(1) = 1$$
- **[Algebra en anillos]**: Si $(A,+,\cdot)$ es anillo y $x,y \in A$:
  - $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$
  - $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$
  - $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
  - $-x = (-1) \cdot x = x \cdot (-1)$
- **[Divisores de cero y dominio de integridad]**: Sea $(A,+,\cdot)$ un anillo. Un elemento $a \neq 0$ es divisor de 0 si $\exists y \neq 0$ tal que $a \cdot y = 0$ o $y \cdot a = 0$. A un anillo conmutativo y sin divisores de 0 lo llamaremos dominio de integridad.
- **[Propiedad]**: Si $(A,+,\cdot)$ anillo, entonces:

  a es cancelable en $(A,\cdot) \Leftrightarrow a$ no es divisor de cero
- **[Cuerpo]**: Una estructura $(\mathbb{K},+,\cdot)$ se llamará cuerpo si:
  - $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es anillo conmutativo.
  - Todo elementos en $K \setminus \{0\}$ es invertible para $\cdot$.

  Equivalentemente $(\mathbb{K},+,\cdot)$ sera cuerpo si y solo si:
  - $(\mathbb{K},+)$ es grupo abeliano.
  - $(\mathbb{K} \setminus \{0\},\cdot)$ es grupo abeliano.
  - $\cdot$ distribuye con respecto a $+$.
- **[Caracterización cuerpos finitos]**: Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es cuerpo, entonces $\mathbb{K}$ no tiene divisores de 0 ($\mathbb{K}$ es dominio de integridad).
  El reciproco se tiene si $|\mathbb{K}|$ es finito, es decir:
  Si $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es dominio de integridad con $|\mathbb{K}|$ finito, entonces $(\mathbb{K},+,\cdot)$ es cuerpo.

Resumen

- **[Homomorfismos]**: Una función $f: A \to B$ es un **morfismo** entre las estructuras algebraicas $(A,*)$ y (B,Δ) si:

  $$\forall x,y \in A,\ f(x*y) = f(x)\Delta f(y)$$

  Si f es biyectiva se dirá **isomorfismo**.
- **[Props epimorfismos]**: Si $f: A \to B$ epimorfismo entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces se tienen las siguientes propiedades:
  - I) Si $(A,*)$ es asociativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  - II) Si $(A,*)$ es conmutativa, entonces (B,Δ) tambien lo es.
  - III) Si e es neutro para $(A,*)$, entonces $f(e)$ lo es para (B,Δ).
  - IV) Si a tiene inverso b para $(A,*)$, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$ para (B,Δ).
- **[Props. más generales]**: Sea f un morfismo de $(A,*)$ a (B,Δ), con neutros e_A y e_B:
  - I) Si $e_B \in f(A)$, entonces $e_B = f(e_A)$.
  - II) Si $e_B \in f(A)$ y $a \in A$ tiene inverso b, entonces $f(a)$ tiene inverso $f(b)$.
- **[Composición]**: Si $f: A \to B$ un homeomorfismo de $(A,*)$ en (B,Δ) y $g: B \to C$ un homemorfismo de (B,Δ) en $(C,\bullet)$, entonces la composición de f con g, $g \circ f: A \to C$, es un morfismo de $(A,*)$ en $(C,\bullet)$.
- **[Estructuras isomorfas]**: Dos estructuras $(A,*)$ y (B,Δ) son isomorfas, denotado $(A,*) \cong (B,\Delta)$, si existe una función $f: A \to B$ isomorfismo.
  Obs.: $\cong$ es una relación de equivalencia.
- **[Isomorfismo inverso]**: Si $f: A \to B$ es un isomorfimos entre $(A,*)$ y (B,Δ), entonces $f^{-1}: B \to A$ es un isomorfismo entre (B,Δ) y $(A,*)$.
- **[Estructura de funciones]**: Sea $(B,*)$ una e.a., entonces $(B^A,*)$ sera una e.a., donde si $f,g \in B^A$ definimos $f*g: A \to B$ por:

  $$(f*g)(x) = f(x)*g(x)$$
- **[Propiedades varias]**:
  - I) Si $(B,*)$ es asociativa, entonces $(B^A,*)$ también.
  - II) Si $(B,*)$ es conmutativa, entonces $(B^A,*)$ también.
  - III) Si $(B,*)$ tiene neutro e, entonces $f \in (B^A,*)$ dado por $f(x) = e$ (función constante) es neutro de $(B^A,*)$
- **[Estructura de pares ordenados]**: Sean $(A_1,*_1)$ y $(A_1,*_1)$ e.a., se define la l.c.i. $\otimes$ sobre $A_1 \times A_2$ por: Para $(a_1,a_2),(b_1,b_2) \subset A_1 \times A_2$:

  $$(a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (a_1 *_1 b_1, a_2 *_2 b_2)$$
- **[Propiedades varias]**:
  - I) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son asociativas, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ también.
  - II) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ son conmutativas, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ también.
  - III) Si $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$ poseen neutros e_1 y e_2, entonces $(A_1 \times A_2,\otimes)$ posee neutro (e_1,e_2)
  - IV) Si a_1,a_2 poseen inversos b_1,b_2 en $(A_1,*_1)$,$(A_2,*_2)$, entonces (a_1,a_2) posee inverso (b_1,b_2) en $(A_1 \times A_2,\otimes)$.
- **[Grupo]**: Sea $(G,*)$ una e.a., diremos que:
  - Es **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro y todo elemento posee inverso.
  - Es **grupo abeliano** si es grupo y $*$ es conmutativa.
- **[Propiedades grupos]**: Sea $(G,*)$ grupo, entonces:
  - I) $\forall a,b \in G, a*x_1 = b \Leftrightarrow x_1 = a^{-1}*b$
    $\forall a,b \in G, x_2*a = b \Leftrightarrow x_1 = b*a^{-1}$
    Es decir, las ecuaciones tienen una única solución.
  - II) $\forall a \in G$ las funciones $I_a(x) = a*x$ y $D_a(x) = x*a$ son biyectivas.
  - III) El unico elemento idempotente es el neutro.
  - IV) Si (K,Δ) una e.a. y $f: G \to K$ morfismo, entonces $(f(G),\Delta)$ es grupo.
  - V) Si (K,Δ) una e.a., un morfismo $f: G \to K$ es monomorfismo (inyectivo) si y solo si $f^{-1}(\{e_K\}) = \{e_G\}$
- **[Grupos importantes]**:
  - Si $(G,*)$ es grupo (abeliano) y $A \neq \emptyset$, entonces $(G^A,*)$ es grupo (abeliano)
  - Si $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2)$ son grupos (abelianos), entonces $(G_1 \times G_2,\otimes)$ es grupo (abeliano).

P1. Sean $(A, *_A)$, $(B, *_B)$ grupos y $f : A \to B$ morfismo. = homomorfismo

a) Demuestre que si $(C, *_A)$ es subgrupo entonces $(f(C), *_B)$ también lo es.

b) Demuestre que si $(D, *_B)$ es subgrupo entonces $(f^{-1}(D), *_A)$ también lo es.

- **[Subgrupo]**: Sea $(G, *)$ grupo y $\emptyset \neq H \subseteq G$. Diremos que H es subgrupo de G si $(H, *)$ es grupo.
- **[Propiedades subgrupos]**:
  1. Si $e \in G$ es el neutro de G y $e_H \in H$ es neutro de H entonces $e = e_H$.
  2. Además, sea $x \in H$. $x^{-1} \in G$ es el inverso de x en $(G, *)$, y $\overline{x}$ es el inverso de x en $(H, *)$. Entonces $x^{-1} = \overline{x}$.
- **[Caracterización Subgrupos]**: Sea $H \neq \emptyset$. Entonces:

  $(H, *)$ es subgrupo de $(G, *) \Leftrightarrow \forall x, y \in H,\ x * y^{-1} \in H$

$f^{-1} = g$

$f : A \to B$

$g : f(A) \to A$

$x *_B y^{-1} \in f(C)$ yo quiero

Sea spg $x, y \in f(C)$

si $x \in f(C)$, $\exists a \in C$, tq $x = f(a)$

si $y \in f(C)$, $\exists b \in C$, tq $y = f(b)$

→ arbitrarios.

$= x *_B y^{-1}$

$= f(a) *_B (f(b))^{-1}$

$= f(a) *_B f(b^{-1})$ ♡

$= f(a *_A b^{-1}) \in f(C)$ ← f morfismo

$a *_A b^{-1} \in C$

$\Leftrightarrow x *_B y^{-1} \in f(C)$

Por enunciado $(A, *_A)$ grupo

$\Rightarrow *_A$ cerrado ($=$ l.c.i)

$\Leftrightarrow b *_A b^{-1} = e_A \ / f$

$\Leftrightarrow f(b *_A b^{-1}) = f(e_A)$

$\Leftrightarrow f(b) *_B f(b^{-1}) = e_B \ / *_B f^{-1}(b)$ (por la izq)

$\Leftrightarrow f^{-1}(b) *_B f(b) *_B f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow e_B *_B f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$

$\Leftrightarrow f(b^{-1}) = f^{-1}(b)$ ♡

⇒ conmutativo

P2. $(G,*)$ un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G. Probar que el conjunto
↳ Asoc, ∃n, Inversos

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de $(G,*)$.

⇒ arbitrarios

Sea $x, y \in H*K$, $x \in H*K$, $x = h_1 * k_1$, $h_1 \in H, k_1 \in K$

PDQ $x * y^{-1} \in H*K$ $y \in H*K$. $y = h_2 * k_2$, $h_2 \in H$, $k_2 \in K$

tomo $x * y^{-1} = (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1}$

$= (h_1 * k_1) * (k_2^{-1} * h_2^{-1})$ ⇓ de antemano K, H son subgrupos

$= (h_1 * k_1) * (h_2^{-1} * k_2^{-1})$ ↓ Con

$= (k_1 * h_1) * (h_2^{-1} * k_2^{-1})$ ↓ Asoc

$= k_1 * (h_1 * h_2^{-1}) * k_2^{-1}$

$\in H$

$= (k_1 * (h_1 * h_2^{-1})) * k_2^{-1}$

$= ((h_1 * h_2^{-1}) * k_1) * k_2^{-1}$

$= (h_1 * h_2^{-1}) * (k_1 * k_2^{-1}) \in H * K$

$\in H$ $\in K$

$\hat{h} = h_1 * h_2^{-1} \in H$

$\hat{k} = k_1 * k_2^{-1} \in K$

$= \hat{h} * \hat{k} \in H * K$

$(k_2^{-1}) * h_2^{-1}$

$\in K$ $\in H$

$H, K \subseteq G$ cumple conmutatividad PARA (*)

$k_2 \in K \Rightarrow k_2 \in G$

P4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

(a) Si $a \in A$ es un divisor del 0 y $b \in A$, tal que $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es divisor del 0.

(b) Demuestre que si el producto de dos elementos es divisor del 0, entonces al menos uno de ellos es divisor del 0.

- **[Divisores de cero y dominio de integridad]:** Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un elemento $a \neq 0$ es divisor de 0 si $\exists y \neq 0$ tal que $a \cdot y = 0$ o $y \cdot a = 0$. A un anillo conmutativo y sin divisores de 0 lo llamaremos dominio de integridad.

1) S: $a \neq 0$ es div 0, si $\exists x \neq 0, x \in A$ $a \cdot x = 0 = x \cdot a$

2) $\exists b \in A$, $a \cdot b = 0$

ACAB

a) PDQ $a \cdot b$ es div de 0

$a \cdot b \neq 0$, $\exists l \in A, l \neq 0$ tq $(ab) \cdot l = 0$ Solo estudio $(ab)l$ y no $l(ab)$ pues $(A,+,\cdot)$ Anillo conmutativo

Basta encontrar l que cumpla lo pedido

Por hipótesis $\exists x \in A$, tq $x \neq 0$ porque a es div 0

$a \cdot x = 0 \ / \cdot b$, $b \neq 0$

$\Leftrightarrow b \cdot (a \cdot x) = b \cdot 0$

$\Leftrightarrow b \cdot (a \cdot x) = 0$

$\Leftrightarrow (b \cdot a) \cdot x = 0$ ↓ Asoc $(A,+,\cdot)$

$\Leftrightarrow (a \cdot b) \cdot x = 0$ ↓ Comm $(A,+,\cdot)$

Como $x \neq 0$, $(a \cdot b) \neq 0$ sea $x = l$ luego (ab) será div 0

b) $a \cdot b$ es div 0 $\Rightarrow$ a div 0 v b div 0

$a \cdot b$ es div 0 $\Leftrightarrow$ $a \cdot b \neq 0$, $\exists x \neq 0$ tq $(a \cdot b) x = 0$ ($x \in A$) (Estoy en $(A,+,\cdot)$ anillo conmutativo

$(a \cdot b) x = 0$, si x fuera div 0, $x \neq 0$, $x \cdot l = 0$ ($l \neq 0$)

i) si a es div 0. ✓

ii) Sup que a no es div 0.

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$ ✗

Luego $b \cdot x = 0$

$\Rightarrow$ b div 0, porque por hipótesis $x \neq 0$

iis) b div 0 ✓

iis) b no era div $0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow ab = 0$ ✗

P5. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por

$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$

(I) Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.

(II) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.

(III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.

i) G grupo abeliano

- Asocia porque $(A,+,\cdot)$ Anillo $\Rightarrow (A,\cdot)$ Asocia $\Rightarrow (G,\cdot)$ Asocia
- Neutro, s: pues $(A,+,\cdot)$ Anillo conmutativo con unidad
- inverso, por definición de G
- Conmutativa, Anillo conmutativo para $\cdot$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ grupo abeliano

ii) $H = \{a^2 \mid a \in G\}$, Sabemos $H \subseteq G$

H subgrupo $\Leftrightarrow x, y \in H, x \cdot y^{-1} \in H$, con $x = a^2$ y $y = b^2$, $a, b \in G$

$x \cdot y^{-1} = a^2 (b^2)^{-1} = a^2 \cdot (b^{-1})^2 = (a \cdot a)(b^{-1} \cdot b^{-1}) = (a b^{-1})^2$, pues $(G,\cdot)$ es abeliano, pues $a \cdot b^{-1} \in G$

$b^2 (b^{-1} \cdot b^{-1}) = 1$

pues $b^{-1} \in G$ si $b \in G$

luego G subgrupo de $(A,\cdot)$

iii) $\mathbb{Z}_8 = \{[a] : 0 \le a < 8, a \in \mathbb{N}\}$

tabla!

·	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$\Rightarrow G = \{1, 3, 5, 7\}$

$H = \{a^2 / a \in G\}$

$H = \{1\}$