Electromagnetismo Aplicado

Unidad 1: 3. Funciones potenciales

Prof. Tomás Cassanelli

Departamento Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

29 de agosto de 2023

tcassanelli@ing.uchile.cl

Contenidos

Figura: Jean le Rond d'Alembert 1717–1783. Matemático francés, físico, filósofo y teórico de música. Por sus trabajo en matemática y física lleva su nombre el operador $\Box$.

Recordatorio de las ecuaciones de Maxwell

- Nótese que algunos libros llaman $\mathcal{E}(x, y, z, t)$, a la función de campo eléctrico variable en el tiempo (Paul & Nasar 1998) o $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ en libros de física (Griffiths 2017)
- $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}(x, y, z, t)$ será para nosotros el campo variable del tiempo y espacio

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \quad \text{(Ley de Gauss)}} \tag{1}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad \text{(Sin nombre)}} \tag{2}$$

$$\text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad \text{(Ley de Faraday)}} \tag{3}$$

$$\text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \left(\boldsymbol{\mathcal{J}} + \boldsymbol{\mathcal{J}}_{\mathrm{d}}\right) \quad \text{(Ley de Ampère + corrección de Maxwell)}} \tag{4}$$

Campos variables en el tiempo

	Campo variable en tiempo	Campo estático	Unidad SI
Electric field intensity	$\mathcal{E}(x, y, z, t)$	$\mathbf{E}(x, y, z)$	$\mathrm{V\,m^{-1}}$
Electric flux density	$\mathcal{D}(x, y, z, t)$	$\mathbf{D}(x, y, z)$	$\mathrm{C\,m^{-2}}$
Magnetic field intensity	$\mathcal{B}(x, y, z, t)$	$\mathbf{B}(x, y, z)$	T or $\mathrm{Wb\,m^{-2}}$
Magnetic flux density	$\mathcal{H}(x, y, z, t)$	$\mathbf{H}(x, y, z)$	$\mathrm{A\,m^{-1}}$
Current density	$\mathcal{J}(x, y, z, t)$	$\mathbf{J}(x, y, z)$	$\mathrm{A\,m^{-2}}$
Volume charge density	$\rho(x, y, z, t)$	$\rho(x, y, z)$	$\mathrm{C\,m^{-3}}$

Cuadro: Lista de elementos ecuaciones de Maxwell estáticos y variables en el tiempo.

- Durante el curso, usaremos tanto $\mathbf{E}, \mathcal{E}$ para variables estáticas como variables en el tiempo, respectivamente
- En escrito serán necesario especificar si $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ o $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$

Campos armónicos

- Campo armónico monocromático es aquel que posee una variación sinusoidal: $\cos(\omega t + \theta)$
- ω: frecuencia angular de la parte temporal; θ: ángulo de desfase
- Monocromático hace referencia a la existencia de una sola frecuencia describiendo la variación temporal; $\omega = 2\pi\nu$
- Es útil separar nuestro campo eléctrico en términos espaciales $(\mathbf{r})$ y temporales (t):

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \underbrace{\mathbf{E}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}_{\text{física}} = \underbrace{\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}_{\text{ingeniería}} \tag{5}$$

- Convenientemente esta descomposición es parte de la naturaleza, pero no siempre es correcta!
- Nótese que la amplitud $\boldsymbol{\mathcal{E}} \in \mathbb{C}$;

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = \left(E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}\right) \underline{/\theta} \tag{6}$$

- Donde $\mathbf{E}_0$ puede o no depender de la posición
- Para los cálculos siempre al final solo nos import la parte real, pero podemos obviar esta condición,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{7}$$

- Esta es la llamada representación fasorial (*phasor*) de campos armónicos

Campos armónicos

- El producto del fasor puede ser compuesto por tos partes:

$$E_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = E_x \cos(\omega t + \theta_x) + \mathrm{j}\, E_x \sin(\omega t + \theta_x) \tag{8}$$

$$= \mathrm{Re}\left[E_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\left[E_x \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{9}$$

- Entonces generalizando:

$$\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\left[\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{10}$$

- Las ecuaciones de Maxwell son lineales, y convenientemente al multiplicar por $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ es posible factorizar por completo el término del tiempo
- La potencia instantánea, relacionada con el vector de Poynting $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ también puede ser representado en esta nueva notación

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{\mathbf{E}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \tag{11}$$

Campos armónicos y Poynting

- Entonces expandimos para $\boldsymbol{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{S}} &= \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \times \mathrm{Re}\left[\mathbf{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] && (12)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{\mathbf{E}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) \times \left(\mathbf{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \overline{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right) && (13)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t} + \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}} \times \mathbf{H} + \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega t}\right) && (14)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} + \overline{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) + \frac{1}{4}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t} + \overline{\mathbf{E}} \times \overline{\mathbf{H}}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega t}\right) && (15)
\end{aligned}$$

- Para visualizar el problema hacemos uso de variables auxiliares $\mathbf{m} = \mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}$ y $\mathbf{n} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, entonces el resultado lo podemos escribir como:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{m} + \overline{\mathbf{m}}\right) + \frac{1}{4}\left(\mathbf{n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t} + \overline{\mathbf{n}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega t}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{m}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right] \qquad (16)$$

Campos armónicos y Poynting

- En general, nos preocupa más saber el promedio de la potencia, $\mathbf{S}_{\text{av}}$,

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{\mathcal{S}}\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

- De la ecuación (16), el primer término no depende del tiempo, y el segundo:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right] = \frac{1}{2}\left\{n_x\cos\left(2\omega t+\theta_x\right)\widehat{\mathbf{x}} + n_y\cos\left(2\omega t+\theta_y\right)\widehat{\mathbf{y}} + n_z\cos\left(2\omega t+\theta_z\right)\widehat{\mathbf{z}}\right\} \tag{18}$$

- Por lo que al integrar en el tiempo promedio de una función sinusoidal $T=\frac{1}{\nu}$ el resultado es cero, finalmente tenemos que:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{S}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{H}}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{\mathbf{E}}\times\mathbf{H}\right] \tag{19}$$

- Donde también hemos definido Poynting para $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\overline{\mathbf{H}}$ (ver Paul & Nasar 1998, capítulo 5)

Ecuaciones de Maxwell y campos armónicos

Ejemplo

Muestre que los siguientes campos en el espacio libre satisfacen las ecuaciones de Maxwell,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = E_0 \cos(\omega t - \beta z)\,\widehat{\mathbf{x}}, \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{E_0}{\eta}\cos(\omega t - \beta z)\,\widehat{\mathbf{y}}. \tag{20}$$

Solución: Partimos desde la ley de Faraday, i.e.,

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t}; \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\mathcal{B}}$$

Expandimos el rotor:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \left(\frac{\partial \cancel{\mathcal{E}_z}}{\partial y} - \frac{\partial \cancel{\mathcal{E}_y}}{\partial z}\right)\widehat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \cancel{\mathcal{E}_z}}{\partial x}\right)\widehat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial \cancel{\mathcal{E}_y}}{\partial x} - \frac{\partial \cancel{\mathcal{E}_x}}{\partial y}\right)\widehat{\mathbf{z}} \tag{21}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z}\widehat{\mathbf{y}} = \beta E_0 \sin(\omega t - \beta z)\,\widehat{\mathbf{y}}, \tag{22}$$

Ecuaciones de Maxwell y campos armónicos

Ejemplo

Tomamos la segunda parte de la ley de Faraday (iii),

$$-\mu_0 \frac{\boldsymbol{\mathcal{H}}}{\partial t} = \frac{\omega \mu_0 E_0}{\eta} \sin\left(\omega t - \beta z\right) \widehat{\mathbf{y}}, \tag{23}$$

por lo que requiere que ecuaciones (22) y (23) sean iguales, viz,

$$\beta = \frac{\omega \mu_0}{\eta}. \tag{24}$$

Ahora nuestras constantes se relacionan a través de ecuaciones (24). Tomando la ley de Ampère, y expandiendo el rotor de $\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}, \tag{25}$$

$$= -\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} \widehat{\mathbf{x}} = -\frac{\beta E_0}{\eta} \sin\left(\omega t - \beta z\right) \widehat{\mathbf{x}} \tag{26}$$

donde además hemos aplicado la condición del espacio libre, i.e., $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0, \sigma = 0, \rho = 0$, y $\boldsymbol{\mathcal{J}} = 0$.

Ecuaciones de Maxwell y campos armónicos

Ejemplo

Ya tenemos la parte izquierda de la ecuaciones de Ampère (iv), ahora calculamos la parte derecha:

$$\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} = -\omega \epsilon_0 E_0 \sin\left(\omega t - \beta z\right) \widehat{\mathbf{x}}. \tag{27}$$

Nuevamente ambas ecuaciones (26) y (27) deben ser iguales,

$$\beta = \omega \epsilon_0 \eta. \tag{28}$$

Entonces combinando ambas ecuaciones de las constantes (ecuaciones 24 y 28),

$$\frac{1}{\eta} \omega \mu_0 = \omega \epsilon_0 \eta \quad \Rightarrow \eta^2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad \Rightarrow \eta = \pm \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}, \quad \Rightarrow \beta = \pm \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}. \tag{29}$$

Finalmente calculamos para la ley de Gauss (i),

Ecuaciones de Maxwell y campos armónicos

Ejemplo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0 \tag{30}$$

Lo que si aplica, ya que las coordenadas se hacen cero. Ahora vemos la ley sin nombre (ii):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial z} = 0 \tag{31}$$

Lo cual nuevamente es verdadero, pero solo cuando ecuaciones (29) se cumple. Nótese que el argumento fue desarrollado en notación de senos y cosenos, ahora aplique el mismo principio pero en notación fasorial.

Ecuaciones de Maxwell y guías de ondas

Ejercicio

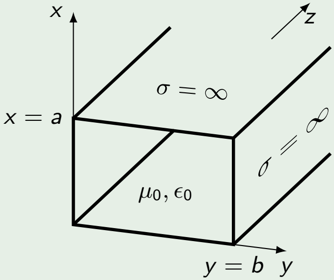

Figura: Guía de ondas.

- Dimensiones importantes son solo a y b, el largo de la guía de ondas no es relevante
- Secciones de metal, conductor ideal $\sigma = \infty$

Ecuaciones de Maxwell y guías de ondas

Ejercicio

El campo electromagnético de una guía de ondas está dado por el siguiente set:

$$\mathcal{E}_x = 0, \qquad \mathcal{E}_y = C\frac{\omega\mu_0 a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\omega t - \beta t\right), \tag{32}$$

$$\mathcal{E}_z = 0 \qquad \mathcal{H}_x = -C\frac{\beta a}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\omega t - \beta z\right) \tag{33}$$

$$\mathcal{H}_y = 0 \qquad \mathcal{H}_z = C\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\omega t - \beta z\right) \tag{34}$$

Donde C es una constante y $\omega = 2\pi f$. Las paredes de la guia de ondas son asumidas como un conductor perfecto. Muestre que este *coupled-set* satisface las ecuaciones de Maxwell y determine las condiciones de borde para las paredes y su carga superficial.

Ecuaciones de Maxwell

- Las ecuaciones de Maxwell están acopladas unas a otras, viz., si una variable es armónica entonces todas lo son

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{D}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{36}$$

- Esto simplifica las ecuaciones de Maxwell ya que su dependencia temporal se cancela:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}} = \rho \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{D} = \rho \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{37}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{B} \qquad \nabla\times\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathrm{j}\omega\mathbf{D} \tag{38}$$

- Donde las cantidad ρ también contiene un fasor (pero que no cambiamos la notación), i.e., $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$
- En general, cuando hablamos fasores $\frac{\partial}{\partial t} \to \mathrm{j}\omega$

- También hemos botado por ahora los indices b (bound) y f (free)
- Continuidad: $\nabla\cdot\mathbf{J} = -\mathrm{j}\omega\rho$

Ecuaciones de Maxwell de forma armónica

- Entonces podemos describir las ecuaciones de Maxwell en forma armónica como:

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{(Ley de Gauss)}} \tag{39}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{(Sin nombre)}} \tag{40}$$

$$\text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad \text{(Ley de Faraday)}} \tag{41}$$

$$\text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \quad \text{(Ley de Ampère + corrección de Maxwell)}} \tag{42}$$

Ecuaciones de Maxwell de forma armónica

- Y solo expresando el set en términos de dos campos **E** y **H**

$$\text{(i)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho \quad \text{(Ley de Gauss)}} \tag{43}$$

$$\text{(ii)} \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad \text{(Sin nombre)}} \tag{44}$$

$$\text{(iii)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\mu\omega\mathbf{H} \quad \text{(Ley de Faraday)}} \tag{45}$$

$$\text{(iv)} \quad \boxed{\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + \mathrm{j}\epsilon\omega)\,\mathbf{E} \quad \text{(Ley de Ampère + corrección de Maxwell)}} \tag{46}$$

- Lo que, nuevamente, para encontrar cada campo total solo se debe multiplicar por el termino fasorial:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\left(\mathbf{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\right] \tag{47}$$

Definición de funciones potenciales

- Consideraremos solo materiales lineales, es decir que deben cumplir con la relación (visto en Clase 4 y 5)

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu \boldsymbol{\mathcal{H}} \tag{48}$$

- Además consideraremos materiales que son isotrópicos y homogéneos
  - isotrópico: permitividad y permeabilidad no dependen de la dirección dentro del material
  - homogéneo: permitividad y permeabilidad son iguales en cualquier punto del material
- Permitividad y permeabilidad pueden ser expresadas entonces como un simple número

Potencial vectorial magnético

- Tomando la ecuaciones de Maxwell (ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0$ y de acuerdo a lo visto en Clase 0, debe existir una función tal que:
$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}} \tag{49}$$
- Donde $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ es llamado el **potencial vectorial magnético**
- El cual fue definido anteriormente en términos del momento de un dipolo magnético

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} = \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{J}} \tag{50}$$

- Por lo general, uno podría agregar cualquier contenido extra a $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y obtener siempre el mismo campo $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, por lo que se hace necesario poner condiciones
- Condición de Lorentz[1] (**Lorentz Gauge**):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\epsilon_0 V \tag{51}$$

[1] No hay mucha claridad a quién atribuirle este resultado, H. A. Lorentz o L. V. Lorenz, pero la mayoría de los libros de electromagnetismo incluyen la letra t (Bladel 1991).

Potencial escalar (no estático)

- Si consideramos la ley de Faraday:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}\right) \tag{52}$$

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t}\right) = 0 \tag{53}$$

- Similarmente por el cálculo vectorial podemos definir un potencial escalar como:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\nabla V \qquad \Rightarrow \mathbf{E} + \mathrm{j}\omega \mathbf{A} = -\nabla V \tag{54}$$

- Nótese que en este resulta, en el caso estático $t =$ constante o campo armónico, tenemos que el potencial corresponde a el potencial eléctrico definido en electrostática[2]

$$\mathbf{E} = -\nabla V \tag{55}$$

- Al igual que en la notación de la densidad de carga ρ, asumimos que puede o no depender de la posición y tiempo, similar la caso de V que sí puede depender del tiempo

[2] En la literatura $\varphi \equiv \phi \equiv V$.

Gauge de Lorentz

- Es importante destacar nuevamente que si sabemos el potencial, V, en general, no es posible saber el valor del campo eléctrico, también necesitamos **A**
- Desarrollando el término encontrado anteriormente

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu \boldsymbol{\mathcal{J}} \tag{56}$$

- Lo que con la condición de Lorentz entonces podemos eliminar el término del medio
- También existe una solución similar propuesta por Coulomb (Gauge de Coulomb)[3], pero no es recomendada ya que interfiere con la relatividad especial
- Las ecuaciones potenciales para **E** y **B** pueden parecer complicadas y no muy fáciles de digerir, pero su gran ventaja es que estamos reduciendo el numero de variables a encontrar!
- Reduciendo efectivamente de 6 (componentes de **E** y **B**) a 4 (componentes de **A** y V), para el caso estático

[3]No es necesario saber esta matemática pero si saber que existe!

Ecuación de onda

- Al combinar las dos definiciones anteriores de potenciales, podemos encontrar que los potenciales cumplen con las siguientes ecuaciones (que son un set de ecuaciones de onda)

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{\mathcal{J}} \tag{57}$$

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{58}$$

- Derivación, empezando con la Ley de Faraday

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t} \tag{59}$$

- Escribiendo la ecuación anterior en términos de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y luego en $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mu \boldsymbol{\mathcal{J}} + \mu\epsilon \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t} \tag{60}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{A}}) - \nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} = \mu \boldsymbol{\mathcal{J}} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) \tag{61}$$

- Con lo que usando la condición de Lorentz (ecuaciones 51) llegamos a ecuaciones (57)

Ecuación de onda

- Ya que los potenciales, vectorial magnético y escalar han sido expresados de forma similar, es conveniente expresarlos mediante un operador único

$$\Box^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{62}$$

- El cual es llamado *d'Alambertian* o d'Alambertiano

$$\text{(i)} \quad \boxed{\Box^2 V = -\frac{1}{\epsilon}\rho} \qquad \text{(ii)} \quad \boxed{\Box^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} = -\mu \boldsymbol{\mathcal{J}}} \tag{63}$$

- Esta representación es muy útil en el contexto de relatividad especial, las cuales pueden ser entendidas como la ecuación de Poisson en 4-dimensiones
- También es llamada la ecuaciones de Laplace para 4-dimensiones
- En el Gauge de Lorentz **A** y V satisface la ecuaciones de onda inhomogénea, con una fuente al lado derecho

Ecuaciones de Poisson y Laplace

- Para campos estáticos (ecuaciones 57 y 58) tenemos que las ecuaciones de potenciales se reducen a la llamada ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \qquad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{64}$$

- Si nos vamos al caso de electrostática clásica:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{s} \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \tag{65}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \qquad \mathbf{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{s} \, d\tau' \tag{66}$$

- Desde la ley de Coulomb para calcular el campo **E**, puede ser complejo realizar integrales donde la simetría no ayuda
- En ciertos casos entonces es posible usar la forma diferencial de $V(\mathbf{r})$ (solución a la ecuación de Poisson) y usar la ecuación de Poisson en forma diferencial
- Recordemos que en coordenadas cartesianas el Laplaciano es: $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Ecuaciones de Poisson y Laplace

- Si se desea aplicar la ecuación de Poisson en una región del espacio donde no existen cargas ni corrientes, entonces estamos en presencia de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} = 0 \tag{67}$$

$$\nabla^2 V = 0 \tag{68}$$

- La ecuación de Laplace es fundamental para el estudio de la electrostática
- La ecuación de Laplace es también muy relevante en física y aparece en el estudio de gravitación, magnetismo, transporte de calor y el estudio de burbujas de jabón
- La solución a la ecuación de Laplace son también llamadas funciones armónicas
- Por lo general, este set de ecuaciones se resuelve usando métodos numéricos

Uso de las ecuaciones para potenciales

- Cuando conocemos los valores de los potenciales o sus derivadas en la frontera de la región considerada es más sencillo resolver las ecuaciones de potencial para obtener $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ y V
- Con las ecuaciones de potenciales nos podemos saltar las ecuaciones de Maxwell para calcular los campos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}}$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{\mathcal{J}} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}} = \nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}} \tag{69}$$

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \tag{70}$$

Ecuaciones de onda en términos de campos armónicos

- Si consideramos campos armónicos, las funciones potenciales también lo son, similar tratamiento a las ecuaciones de Maxwell
- Nuevamente si usamos la representación fasorial, $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, podemos eliminar la dependencia temporal del campo, i.e.,

$$\nabla^2 \boldsymbol{\mathcal{A}} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu \boldsymbol{\mathcal{J}} \qquad \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} + \epsilon\mu\omega^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{71}$$

$$\nabla^2 V - \epsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \qquad \Rightarrow \nabla^2 V + \epsilon\mu\omega^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \tag{72}$$

- Las ecuaciones de campos son súper convenientes cuando es posible aislar t

Superficie de radiación o de antena

- En el caso particular armónico de una antena, la corriente es conocida y es posible resolver las ecuaciones de potenciales para obtener los campos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{73}$$

- Con $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ una constante (que será llamada constante de onda plana), expandiendo

$$\nabla^2 A_x + \beta^2 A_x = -\mu J_x \qquad \Rightarrow A_x = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{J_x \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{s}\,\mathrm{d}\tau' \tag{74}$$

$$\nabla^2 A_y + \beta^2 A_y = -\mu J_y \qquad \Rightarrow A_y = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{J_y \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{s}\,\mathrm{d}\tau' \tag{75}$$

$$\nabla^2 A_z + \beta^2 A_z = -\mu J_z \qquad \Rightarrow A_z = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{J_z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{s}\,\mathrm{d}\tau' \tag{76}$$

- Combinando tenemos la expresión:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta r'}}{s}\,\mathrm{d}\tau' \tag{77}$$

Superficie de radiación o de antena

- Donde $\mathbf{J}_0$ sin el factor exponencial dependiente de la posición
- Inicialmente generalizamos la expresión para un campo armónico como:

$$\mathcal{E}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{78}$$

- Donde el vector número de onda $\mathbf{k}$ en ingeniería es comúnmente expresado como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \beta \tag{79}$$

- La ecuación es solo posible resolver al asumir que la velocidad de la luz es finita, y de valor $u = \left(\mu\epsilon\right)^{\frac{1}{2}}$, lo que veremos en la próximas clases
- Entonces $\mathcal{J}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{J}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$
- Finalmente si se conoce la distribución de corriente en la superficie de la antena $\mathbf{J}_0$, de la condición de Lorentz

$$V = -\frac{\nabla\cdot\mathbf{A}}{\mathrm{j}\omega\mu\epsilon} \qquad \Rightarrow \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)}{\mathrm{j}\omega\mu\epsilon} \tag{80}$$

- Con lo que dado el potencial vectorial magnético se puede obtener la distribución eléctrica de una superficie (ver Paul & Nasar 1998, capítulo 9)

Solución ecuaciones de onda para campos armónicos

- Recordemos que en el caso estático tenemos que

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \text{y} \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \tag{81}$$

- Con su solución ya vista anteriormente

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{s}\,\mathrm{d}\tau', \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{s}\,\mathrm{d}\tau' \tag{82}$$

- Las ecuaciones de onda para campos armónico poseen una resolución formal matemática, aunque es difícil de implementar, no las demostraremos aquí, pero sus soluciones son:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}s\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{83}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}s\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\,\mathrm{d}\tau' \tag{84}$$

Solución ecuaciones de onda para campos armónicos

- Por tanto si s_{max} es la máxima dimensión de algún volumen, y si la exponencial

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, s_{\mathrm{max}} \omega \sqrt{\mu \epsilon}} \approx 1 \quad \text{i.e.,} \quad s_{\mathrm{max}} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \ll 1 \tag{85}$$

- Entonces cualquier caso armónico que dependa de t puede ser aproximado a un caso estático!
- Esta condición es también llamada *bajas frecuencias* y cualquier método de campos estáticos puede ser usada para resolver el problema
- Por último, recordar que para los casos generales que hemos analizado durante la clase, en general las siguientes relaciones **no** se cumplen

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t\right)}{s^2} \widehat{\mathbf{s}}\, \mathrm{d}\tau', \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t\right) \times \widehat{\mathbf{s}}}{s^2} \mathrm{d}\tau'} \tag{86}$$

Resumen de otras variables

Nombre	**Name**	**Símbolo**	**Unidad SI**
Campo vectorial magnético	*Magnetic vector potential*	$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\mathbf{r}, t)$	$\mathrm{V\,s\,m^{-1}}$
Vector de Poynting	*Poynting vector*	$\boldsymbol{\mathcal{S}}(\mathbf{r}, t)$	$\mathrm{W\,m^{-2}}$
Potencial escalar	*Scalar potential*	$V(\mathbf{r}, t)$	V
Constante de onda plana	*Plane wave constant*	β	$\mathrm{rad\,m^{-1}}$

Cuadro: Lista de variables usadas en campos armónicos.

- Nótese que las variables V, ρ poseen la misma notación en el caso estático y variable en el tiempo

Resumen

- Hemos re-definido los conceptos de potenciales vectorial y escalar
- Primero visto matemáticamente en Clase 0
- $\mathbf{E}$ re-definido en electrostática como $\mathbf{E} = -\nabla V$ y electrodinámica (campos armónicos) $\mathbf{E} = -\nabla V - \mathrm{j}\omega\mathbf{A}$
- $\mathbf{A}$ re-definido el potencial vectorial magnético (aunque siempre como un herramienta matemática)
- Gauge de Lorentz $\rightarrow$ una condición matemática para resolver sistemas de potenciales
- Hemos definido las ecuaciones de Maxwell en términos de campos armónicos y así definir una nueva clase de soluciones
- Vimos las ecuaciones más importantes de electrodinámica: ecuaciones de Poisson y ecuaciones de Laplace (con y sin fuente respectivamente)
- Próxima clase: 1.4 métodos de la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace

Bibliografía

Bladel, J. 1991, IEEE Antennas and Propagation Magazine, 33, 56, doi: 10.1109/MAP.1991.5672657

Griffiths, D. J. 2017, Introduction to Electrodynamics, 3rd edn. (Prentice Hall)

Paul, C. R., & Nasar, S. A. 1998, Introduction to Electromagnetic Fields (McGraw-Hill)