Pequeño resumen C1

Movimiento armónico simple

Ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Con ω_0 la frecuencia angular natural. La solución general de esta ecuación viene dada por:

$$x(t) = A_0 cos(\omega_0 t + \phi) + B_0 sen(\omega_0 t + \phi)$$

Donde A_0 y B_0 se determinan con las condiciones iniciales. Forma imaginaria:

$$x(t) = Ae^{i(\omega_0 t + \phi)}$$

La frecuencia angular ω_0 [radianes/segundo] cumple con la normalización (f la frecuencia en Hertz y T el período en segundos):

$$\omega_0 = 2\pi f = 2\pi/T$$

De aquí que mientras mayor frecuencia (y menor período), la oscilación demora menos tiempo en recorrer "2π unidades angulares".

Con condiciones iniciales:

$x(t = 0) = x_0$ y $\dot{x}(t = 0) = v_0$

Tendremos:

$$tan(\phi) = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} = A_0^2$$

(Donde envés de A_0, se puede tener B_0 en esta última ecuación)

Péndulo simple

Ecuación:

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\phi = 0$$

Donde $\omega_0^2 = g/L$ es la frecuencia angular de este sistema. Notar que tan sólo depende del largo L del péndulo y de la gravedad g del lugar. No depende de la masa m que esté pendiendo del hilo.

La solución será la misma mostrada en la sección anterior:

$$\phi(t) = A_0 cos(\omega_0 t + \delta)$$

En donde la amplitud "A_0" representa un ángulo y por ende se mide en radianes, por lo que esta cantidad no contiene unidades como metros, kilogramos, segundos, etc.

La fase δ le otorga mayor amplitud a la oscilación ("mueve" la oscilación más allá del ángulo inicial $\phi(0)$), dado que si existe fase significa que existe velocidad angular inicial (Recordar! si no hay velocidad inicial lo más simple es hacer $\delta = 0$) y por lo tanto, la amplitud A_0 será mayor que la posición inicial $\phi(0)$. Finalmente recordemos que:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{f}$$

Oscilaciones forzadas

Ecuación:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0 cos(\omega t)$$

Donde la fuerza del lado derecho puede ser un coseno o seno, pero siempre será (para efectos de este curso) una función sinusoidal o exponencial.

Para encontrar la solución particular de esta ecuación (Recordar! la solución homogénea es la que resuelve la Ecuación Diferencial sin forzamiento externo, osea es la ecuación del oscilador armónico, cuya solución ya fue descrita. En cambio la solución particular es la que busca encontrar un "x(t)" tal que se cumpla que al reemplazar obtengamos el forzamiento externo), intentamos "adivinar educadamente" la respuesta. Esto lo podemos hacer debido a que luego de un tiempo inicial, el sistema forzado terminará cediendo y oscilando con la misma frecuencia angular ω del forzamiento. Por lo que proponemos un "Ansatz" (adivinanza) de la forma:

$$x(t) = Acos(\omega t + \phi)$$

El cual al reemplazar en la ecuación se obtiene:

$$Acos(\omega t + \phi)(-\omega^2 + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} cos(\omega t)$$

De donde podemos deducir que $\phi = 0$. Despejando A:

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Esta es la amplitud que un oscilador forzado SIEMPRE tendrá. Notemos que si $\omega > \omega_0$ se tiene un cambio de signo, por lo que la fase en este caso sería $\phi = \pi$. Entonces, siempre en un oscilador forzado se tendrá que la fase será cero o π dependiendo del signo de A. Recordemos que esta solución deja de ser válida para el caso en que $\omega = \omega_0$ dado que el sistema para este caso diverge en este modelo (colapsa).

La solución general de la EDO viene dada por la suma de la solución homogénea y particular, osea:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = A_0 cos(\omega_0 t + \delta) + Acos(\omega t + \phi)$$

En donde más arriba se detalló como obtener A_0 y δ con las condiciones iniciales. Recordar de todas formas que en general en cualquier problema de oscilación forzada, se le dará mayor interés a la solución particular, dado que esta es independiente de las condiciones iniciales y por ende es la que suele dominar para períodos de tiempo mayores.

Ondas

Ecuación:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

En donde c es la velocidad de propagación de la onda ($c = \sqrt{\tau/\mu}$ para una cuerda 1D, con τ la tensión y μ la densidad lineal; $c = \Delta\sqrt{C_0/I}$ es la velocidad para un sistema de varillas con momento de inercia I, espaciadas por una distancia Δ, y cuya constante de torsión es C_0).

En la ecuación de ondas se relacionan dos derivadas de la perturbación y que queremos modelar, en donde en el lado izquierdo tenemos la aceleración y en el derecho una constante por la "concavidad" de la onda. Este último término (la segunda derivada espacial de y) representa "qué tan curvada se encuentra la onda" dado que nos indica la tasa de cambio de la primera derivada, la cual es la pendiente del gráfico y vs x. Osea, nos indica cómo varía la pendiente, y.. Dónde varía más la pendiente? En los antinodos, por lo que en esos puntos este término tendrá su mayor (y menor) valor. Una forma de encontrarle sentido a esta ecuación es pensando entonces que "a mayor concavidad, mayor aceleración vertical en ese punto en la onda". Lo cual tiene sentido si pensamos que el movimiento en y de un diferencial de onda (o de cuerda) es un oscilador armónico, el cual, si hacemos la analogía con el resorte, a mayor estiramiento, mayor fuerza (aceleración) recibe ese punto.

La solución general de la ecuación de ondas es:

$$y(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

En donde recordemos que la segunda función g es una onda moviéndose a la derecha y la primera función f es otra onda moviéndose a la izquierda. En general las funciones f y g siempre serán sinusoidales o exponenciales

La forma más habitual de escribir la solución es:

$$y(x, t) = B_0 sen(kx \pm \omega t + \phi)$$

En donde: ϕ y B_0 se determinan con condiciones de borde, $\omega = ck$ (relación de dispersión), y k es llamado el "número de onda" y es un simil a la frecuencia angular ω_0 dado que cumple la relación: $k\lambda = 2\pi$, osea, nos indica que cada una longitud de onda se completa un ciclo de "2π unidades angulares". A mayor k, más rápido se completa un ciclo y por lo tanto la longitud de onda se hace mas corta. Por lo tanto podríamos llamarlo en cierto modo como una "frecuencia espacial". En más dimensiones ya no es tan sólo un número, si no que pasa a ser un vector, el cual indica la dirección y sentido de propagación de la onda.

De las relaciones: $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ y $\lambda = ct$, se pueden deducir todas las relaciones necesarias para despejar lo pedido en un problema puntual.

Para el caso de una onda armónica estacionaria en una cuerda vibrando con bordes fijos (Longitud L, densidad de masa μ y tensión τ):

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \omega_n = ck_n = \frac{cn\pi}{L} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

y de aquí que:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \frac{1}{T_n}$$

Donde el subíndice n-ésimo indica el modo normal en el que está oscilando la cuerda (Número de antinodos presentes). Estas relaciones vienen de imponer una onda tipo seno, e imponer en los bordes que $sen(k * 0) = 0$ (se tiene) y que $sen(k_n * L) = 0$, esto último implica que:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

, con n un entero.

Para recordar:
La frecuencia de una onda no cambia al pasar de un medio a otro (densidades distintas).

Si una onda pasa de un medio de densidad mayor a uno de densidad menor, la onda en este último medio irá mas rápido y aumentará su longitud de onda (suponiendo que la tensión se mantiene constante, que es en los casos en que se suele trabajar).

Las ondas cumplen el principio de superposición y por lo tanto se pueden interferir constructiva o destructivamente. Toda onda siempre puede modelarse como la suma de muchas ondas superponiéndose.