FI2002-6 Electromagnetismo.
Profesor: Marcel G. Clerc.
Auxiliares: Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 8: Dieléctricos y condensadores.

10 de Octubre del 2023

P1.- Material dieléctrico no homogéneo:

a) Un condensador corresponde a un objeto capaz de acumular carga eléctrica de una manera tal que permite almacenar energía en forma de un campo eléctrico. Los condensadores pueden tener muchas formas distintas y disponer de muchos materiales diferentes, pero a modo general están compuestos por dos superficies conductoras separadas por vacío o por un material dieléctrico, donde cada placa tiene una carga eléctrica de magnitud Q, con signo contrario entre ellas. Estas placas están en una situación de *influencia total*, lo que significa que sólo existe campo eléctrico en el espacio que hay entre las placas conductoras del condensador, mientras que en el resto del espacio se asume que $\vec{E} = \vec{0}$. Este campo eléctrico es directamente proporcional a la carga Q asociada a las placas del condensador, y por lo tanto si calculamos la diferencia de potencial ΔV entre las placas, esta cantidad también será directamente proporcional a Q, es decir, podemos escribir:

$$Q = C\Delta V \tag{1}$$

En esta expresión la constante de proporcionalidad C se conoce como **capacitancia** del condensador, y corresponde a una magnitud que nos permite entender qué tan bueno es el condensador para almacenar energía. Esta energía U almacenada por el condensador puede escribirse en función de Q y ΔV, ó en función de Q y C si desarrollamos con la expresión anterior:

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V \;\Rightarrow\; U = \frac{Q^2}{2C} \tag{2}$$

Si despejamos C de las expresiones (1) y (2) encontraremos dos relaciones que nos permiten calcular la capacitancia para un condensador cualquiera:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad ; \qquad C = \frac{Q^2}{2U} \tag{3}$$

Ambas expresiones son igual de válidas, por lo tanto la elección en un problema particular se basa en si es más sencillo obtener la diferencia de potencial ΔV (en cuyo caso usamos la primera expresión) o si es más sencillo obtener la energía U del condensador (en este caso usamos la segunda expresión). De todas formas, cualquiera de las dos elecciones requiere que podamos encontrar el campo eléctrico $\vec{E}$ en el espacio entre las placas del condensador, que corresponde al punto de partida en este tipo de sistemas.

En este caso se tiene un condensador esférico relleno con un material dieléctrico isótropo y lineal, pero no homogéneo, ya que la permitividad eléctrica del material varía según la distancia radial r (medida desde el centro del condensador) según la función $\varepsilon(r) = \frac{\varepsilon_0 a}{r}$. Ya que esta propiedad del material sólo varía con la distancia radial, nuestro sistema tiene simetría esférica, y por lo tanto podemos aplicar la ley de Gauss para el vector desplazamiento $\vec{D}$:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \tag{4}$$

Al igual que con el campo eléctrico, en el caso de simetría esférica los elementos de esta integral son tales que $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ y $d\vec{S} = r^2\sin(\theta)d\phi d\theta\hat{r}$, donde $\hat{r}$ es el vector unitario radial de coordenadas esféricas, entonces al reemplazar en la integral del lado izquierdo de la ley de Gauss se tiene lo siguiente:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(D(r)\hat{r})\cdot(r^2\sin(\theta)d\phi d\theta\hat{r}) = r^2D(r)\left(\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right)$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2D(r)$$

Ahora, tomando en cuenta que la carga encerrada por una esfera gaussiana de radio $r\in(a,b)$ es Q (que corresponde a la carga del cascarón interior), al reemplazar en la ley de Gauss (4) se tiene lo siguiente:

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{enc}} \;\Rightarrow\; 4\pi r^2D(r) = Q \;\Rightarrow\; D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}}$$

Ahora, en el caso de un medio lineal e isótropo se tiene que $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, donde ε es la permitividad eléctrica del medio dieléctrico. Tomando en cuenta eso, y la expresión para $\varepsilon(r)$ que se entrega en el enunciado, se tiene que:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon(r)}\vec{D} = \left(\frac{r}{\varepsilon_0 a}\right)\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 ar}\hat{r}}$$

Por último, para medios lineales e isótropos se tiene la relación $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$, entonces:

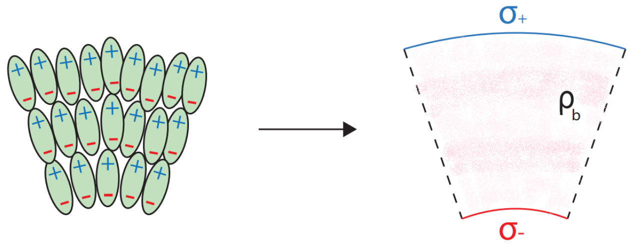
$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} - \varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 ar}\hat{r} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\hat{r}} \tag{5}$$

b) Cuando un material dieléctrico lineal e isótropo[1] se ubica en una zona del espacio con cierto campo eléctrico $\vec{E}$, los dipolos asociados a los átomos y/o moléculas que conforman el material se alinearán con las líneas de campo eléctrico[2], lo que genera un reordenamiento de los polos positivos y negativos en todo el material. Ahora, por las condiciones del sistema este reordenamiento de cargas puede generar una concentración de carga neta en ciertas zonas del material dieléctrico, tanto en su volumen como en sus superficies, y estas concentraciones de carga afectan al campo eléctrico neto dentro del material. Ahora, esta concentración de carga en distintas zonas del material puede modelarse como la suma de una densidad superficial σ_b más una densidad volumétrica ρ_b, donde estas cantidades se conocen como densidades de cargas de polarización, y se calculan a partir del vector polarización $\vec{P}$.

Partiremos por las densidades superficiales de polarización. Ya que los átomos y/o moléculas del material dieléctrico se comportan como dipolos, en la capa exterior del material (es decir, en su superficie) uno de los polos debe quedar apuntando hacia afuera (ver figura en la página siguiente). Si en ciertas zonas de la superficie se acumulan polos de un mismo signo, tendremos una densidad

[1] Para materiales no isótropos las moléculas también se alínean en una dirección privilegiada, pero esta dirección no es necesariamente paralela al campo eléctrico.

[2] Esto sólo ocurre si la permitividad eléctrica del material es positiva. En caso de ser negativa, los dipolos se ordenan perpendiculares a las líneas de campo eléctrico.



superficial σ_b que modela la distribución de estos polos, y esta densidad se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$\sigma_b = \vec{P}_{\text{sup}} \cdot \hat{n}$$

El vector $\vec{P}_{\text{sup}}$ corresponde al vector polarización evaluado en la superficie, mientras que $\hat{n}$ es el vector unitario perpendicular a la superficie, y que apunta hacia afuera del material dieléctrico. Como en este caso el material dieléctrico tiene dos caras, debemos encontrar la densidad superficial de polarización asociada a cada una de estas. Para la cara en $r = a$ el vector que apunta hacia afuera del material es $\hat{n} = -\hat{r}$, mientras que para el caso $r = b$ se tiene que $\hat{n} = \hat{r}$, entonces usando eso y la expresión (5) se tiene que:

$$\sigma_b(r=a) = \vec{P}(r=a) \cdot (-\hat{r}) = \left(\frac{Q}{4\pi a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) \hat{r} \right) \cdot (-\hat{r}) \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_b(r=a) = 0}$$

$$\sigma_b(r=b) = \vec{P}(r=b) \cdot (\hat{r}) = \left(\frac{Q}{4\pi b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \hat{r} \right) \cdot \hat{r} \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_b(r=b) = \frac{Q}{4\pi b} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)}$$

Por último, en zonas al interior del volumen del material conductor el reordenamiento de cargas puede ser inhomogénemo, lo que resulta en una concentración de cargas local modelada por una densidad volumétrica de polarización ρ_b, la cual se puede obtener a partir de la siguiente expresión:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Como en este caso el vector polarización $\vec{P}$ obtenido en (5) sólo tiene componente radial, al aplicar la divergencia sólo necesitamos la parte asociada a las derivadas con respecto a la coordenada radial r, entonces:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(\frac{Q}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \right) \right) \;\Rightarrow\; \boxed{\rho_b = \frac{Q}{4\pi a r^2}}$$

c) Para encontrar la capacitancia usamos la primera expresión mostrada en (3). Ya que tenemos el campo eléctrico en el espacio entre las placas esféricas, podemos calcular la diferencia de potencial entre ellas, entonces:

$$\Delta V = \int_a^b \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a r} \hat{r} \cdot dr\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_a^b \frac{dr}{r} \;\Rightarrow\; \Delta V = \frac{Q \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Entonces, usando esta diferencia de potencial se tiene que:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi\varepsilon_0 a}} \;\Rightarrow\; \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 a}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

P2.- <u>Medición de constante dieléctrica</u>:

Como queremos encontrar la posición de equilibrio del bloque de material dieléctrico, necesitamos estudiar el equilibrio mecánico de este cuerpo, por lo que debemos identificar las fuerzas que actúan sobre este e imponer que la suma es cero. Con la información que tenemos podemos tomar en cuenta que las únicas fuerzas existentes son la fuerza $\vec{F}_r$ asociada al resorte, y la fuerza $\vec{F}_d$ que el condensador ejerce sobre el dieléctrico. Esta útlima fuerza aparece ya que las placas del condensador polarizan la zona más cercana del material dieléctrico, y la redistribución de cargas en el material es tal que las placas del condensador atraen al dieléctrico hacia dentro de este, tal como se muestra en la siguiente figura:

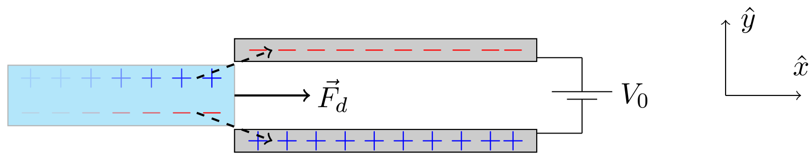
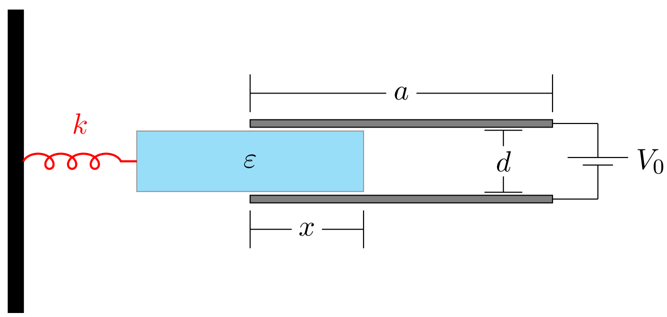


Figura 1: El condensador ejerce una fuerza que atrae al dieléctrico hacia dentro de este.

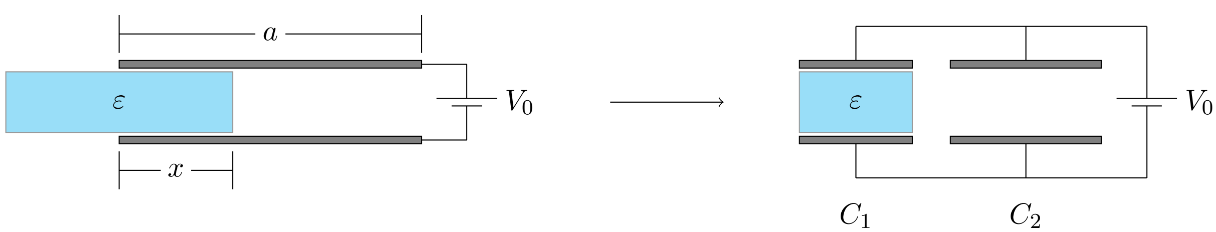
Tomando en cuenta esto, consideremos un caso en donde el bloque está inserto en una distancia x, tal como se muestra en la siguiente figura:



La mejor manera de encontrar la fuerza que el condensador ejerce sobre el dieléctrico es usando la relación $\vec{F} = -\nabla U$, donde U es la energía potencial electrostática. Esto es conveniente ya que la energía U se puede encontrar usando la relación[3] para la energía de un condensador:

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V \quad ; \quad U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \quad ; \quad U = \frac{Q^2}{2C} \tag{6}$$

Como en este problema la carga entre las placas no es conocida, nos conviene usar la segunda expresión para U. Se tiene que $\Delta V = V_0$, mientras que C puede calcularse si recordamos que este tipo de configuraciones se puede modelar como un par de condensadores en paralelo, tal como se muestra en la siguiente figura:



[3] Estas tres relaciones son equivalentes, pueden conectarse entre ellas recordando que para un condensador $Q = C\Delta V$.

La capacitancia de un condensador de placas paralelas de área A separadas en una distancia L, y relleno con un material de permitividad eléctrica ε es:

$$C = \frac{\varepsilon A}{L}$$

El condensador relleno con dieléctrico tiene una longitud a, ancho x, y sus placas están separadas en una distancia d, entonces su capacitancia es:

$$C_1 = \frac{\varepsilon a x}{d}$$

Por otro lado, el condensador vacío tiene una longitud a, ancho $a - x$, y sus placas están separadas en una distancia d, entonces su capacitancia es:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d}$$

Ahora, como estos dos condensadores están en paralelo, la capacitancia equivalente corresponde a la suma de las capacitancias individuales, entonces:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon a x}{d} + \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d} \;\Rightarrow\; C = \frac{a}{d}\left(\varepsilon_0 a + (\varepsilon - \varepsilon_0)x\right)$$

Entonces, reemplazando esto y $V = V_0$ en la segunda expresión para la energía mostrada en (6), la energía potencial electrostática del condensador es:

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \;\Rightarrow\; U = \frac{aV_0^2}{2d}\left(\varepsilon_0 a + (\varepsilon - \varepsilon_0)x\right)$$

Ahora que se tiene esta energía, podemos relacionarla con la fuerza que estamos buscando a través de la expresión $\vec{F} = -\nabla U$. Sin embargo, antes de hacer esto es importante entender que la energía U obtenida en la expresión anterior es la energía **del condensador**, por lo tanto al aplicar la relación $\vec{F} = -\nabla U$ con la energía encontrada anteriormente, la fuerza que encontremos será la fuerza que siente **el condensador** debido a la atracción del bloque dieléctrico. Tomando en cuenta eso, luego de aplicar la relación $\vec{F} = -\nabla U$ tendremos que $\vec{F}_d = -\vec{F}$ (en virtud de la 3ra ley de Newton).

Entonces, si usamos $\hat{x}$ para representar la dirección horizontal (como se muestra en la Figura 1), al aplicar el gradiente a la energía potencial electrostática se tiene lo siguiente:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dx}\hat{x} \;\Rightarrow\; \vec{F} = -\frac{aV_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2d}\hat{x}$$

Entonces, como la fuerza $\vec{F}_d$ que el bloque dieléctrico siente desde el condensador es el opuesto aditivo de $\vec{F}$, se tiene que:

$$\Rightarrow\; \vec{F}_d = \frac{aV_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2d}\hat{x}$$

Como $\varepsilon > \varepsilon_0$, se tiene que $\vec{F}_d$ apunta hacia la derecha, lo cual es consistente con lo discutido en la página anterior. Ahora que tenemos esta fuerza, debemos sumarla con la fuerza elástica, imponer que la suma sea cero, y con esto despejar la distancia ℓ de equilibrio.

Si tomamos en cuenta que el estiramiento del resorte es la distancia ℓ que el bloque dieléctrico se desplaza, entonces por ley de Hooke se tiene que el resorte genera una fuerza elástica $\vec{F}_r = -k\ell\hat{x}$ cuando el bloque está en equilibrio, donde k es la constante elástica del resorte. Entonces, en equilibrio mecánico necesitamos que $\vec{F}_r$ y $\vec{F}_d$ sumen cero, y al imponer esto podremos despejar ℓ:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{F}_r + \vec{F}_d = \vec{0} \;\Rightarrow\; -k\ell\hat{x} + \frac{aV_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2d}\hat{x} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\ell = \frac{aV_0^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2kd}}$$

Ahora, una forma práctica de aplicar este resultado es el siguiente. En general la distancia ℓ podría medirse experimentalmente sin problemas, por lo tanto al reordenar la expresión anterior (tomando en cuenta ℓ como dato) se puede obtener una relación para medir la permitividad eléctrica ε de forma indirecta:

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{2kd\ell}{aV_0^2} + \varepsilon_0}$$