

**FI2002-6** Electromagnetismo.

**Profesor:** Marcel G. Clerc.

**Auxiliares:** Pedro Aguilera, Roberto Gajardo.



## Auxiliar 16: Inducción y ley de Ampère-Maxwell.

29 de Noviembre del 2023

### P1.- Descarga de condensador:

a) Para esta pregunta usaremos la ley de Ampère, la cual nos dice (en su forma integral y diferencial):

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Donde  $\vec{J}_f$  es la densidad de corriente libre y  $\vec{D}$  es el vector desplazamiento. Estas expresiones nos dicen que un campo magnético es generado por un transporte de cargas (de ahí el término asociado a  $\vec{J}_f$ ) o bien por un flujo de campo eléctrico que varía en el tiempo (de ahí el término asociado a  $\vec{D}$ ). En ausencia de magnetización se tiene que  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , y entonces las expresiones anteriores quedan como:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

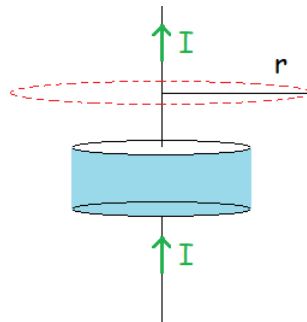
Usamos como origen la placa inferior del condensador, y nos separamos en los casos dentro del condensador ( $z \in [0, h]$ ) y fuera del condensador ( $z \in (-\infty, 0) \cup (h, \infty)$ ).

#### 1) Fuera del condensador:

Conceptualmente se sabe que el campo eléctrico generado por el condensador es cero en todo el espacio, excepto entre las placas, por lo tanto en este caso  $\vec{E} = \vec{D} = \vec{0}$ . Eso reduce el problema en esta zona al de un campo magnético generado por un cable por el cual va una corriente (libre)  $I_f = I_0 (1 - e^{-\lambda^2 t})$ , entonces podemos usar sin ningún problema la ley de Ampère en su forma integral:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_f$$

Usamos como curva  $C$  una circunferencia de radio  $r$  centrada en el cable, tal como se muestra en la siguiente imagen:



Con esto se tiene que  $d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}$ , donde  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Por otro lado, por regla de la mano derecha podemos notar que  $\vec{B} = B(r, t) \hat{\theta}$ , y entonces:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r)\hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta} &= \mu_0 I_0 (1 - e^{-\lambda^2 t}) \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_0 (1 - e^{-\lambda^2 t}) \\ \Rightarrow \vec{B}(r, t) &= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \hat{\theta} \ ; \ z \in (-\infty, 0) \cup (h, \infty) \ , \ r \in (0, \infty) \end{aligned} \quad (1)$$

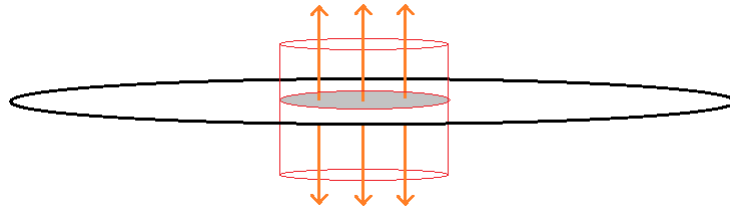
II) Dentro del condensador:

En la zona dentro del condensador no hay ninguna corriente (porque el material dieléctrico no es conductor), por lo tanto se podría pensar que el campo magnético es cero. Sin embargo, como estamos dentro del condensador el campo eléctrico (y por lo tanto  $\vec{D}$ ) es distinto de cero, y éste apunta desde la placa inferior (carga positiva) hacia la placa superior (carga negativa)<sup>1</sup>, y entonces por ley de Ampère se sabe que aparece un campo magnético producto de un flujo de campo desplazamiento que varía en el tiempo.

Ahora, para encontrar  $\vec{D}$  en el espacio entre las placas primero se debe usar la ley de Gauss para encontrar el campo desplazamiento  $\vec{D}_p$  producido por una sola placa, es decir:

$$\oint_S \vec{D}_p \cdot d\vec{S} = Q_f$$

Donde  $Q_f$  es la carga (libre) encerrada por la superficie cerrada  $S$ . Para calcular el vector desplazamiento para cada una de las placas usamos como superficie gaussiana un cilindro que la atraviesa (análogo a lo que se hace en el caso del campo eléctrico), tal como se muestra en la siguiente imagen:



En este caso la carga encerrada (en gris) es un disco. Asumiendo que nuestra placa tiene una densidad de carga libre  $\sigma_f$ , y que la sección transversal de nuestro cilindro gaussiano es  $A$ , entonces  $Q_f = \sigma A$ . Ahora, al ser una placa asumimos que el campo desplazamiento es perpendicular a ésta, y por lo tanto el campo  $\vec{D}_p$  atraviesa las dos tapas del cilindro, con lo cual el flujo es a través de un área  $2A$ . Reemplazando todo esto en la ley de Gauss se tiene que:

$$\oint_S \vec{D}_p \cdot d\vec{S} = Q_f \Rightarrow 2AD_p = \sigma A \Rightarrow D_p = \frac{\sigma}{2}$$

Ahora, sean  $\vec{D}_s$  y  $\vec{D}_i$  el vector desplazamiento de la placa superior e inferior, respectivamente. Como la placa inferior tiene carga positiva usamos  $\sigma_i = \sigma$ , mientras que para la placa superior, al tener la misma carga pero con signo negativo, usamos  $\sigma_s = -\sigma$ . Por otro lado, el vector desplazamiento apunta en  $\hat{z}$  para la placa inferior y en  $-\hat{z}$  para la placa superior. Entonces, reemplazando todo se tendrá el siguiente vector desplazamiento generado por cada placa en el espacio entre las placas:

<sup>1</sup>Para entender por qué las placas tienen cargas de ese signo debemos notar el sentido de la corriente  $I(t)$ . Esta va desde  $-\infty$  hacia la placa inferior, la cual comienza a acumular carga, mientras que en el resto del cable la corriente va desde la placa superior hacia  $\infty$ , con lo cual se le quita carga positiva a la placa superior, quedando con una carga neta negativa.

$$\vec{D}_i = \frac{\sigma}{2} \hat{z} \quad ; \quad \vec{D}_s = -\frac{\sigma}{2} (-\hat{z})$$

Al cancelarse los signos notamos que  $\vec{D}_i = \vec{D}_s$ . Ahora, por superposición el vector desplazamiento entre las placas será la suma de estos dos términos, y entonces:

$$\vec{D} = \vec{D}_i + \vec{D}_s \Rightarrow \vec{D} = \sigma \hat{z}$$

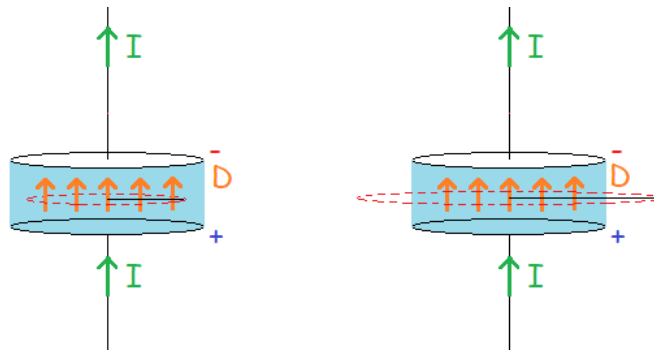
Por otro lado, si asumimos<sup>2</sup> que la carga en una de las placas es  $Q(t)$ , y sabiendo que el área de esa placa es  $\pi R_0^2$ , podemos escribir el vector desplazamiento como:

$$\vec{D} = \frac{Q(t)}{\pi R_0^2} \hat{z}$$

Notamos que  $\vec{D}$  es uniforme en el espacio entre las placas. Ahora que encontramos  $\vec{D}$ , podemos usar la ley de Ampère para calcular el campo magnético generado por la variación temporal del flujo de  $\vec{D}$ , es decir:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Como  $\vec{D} = D\hat{z}$ , entonces la superficie  $S$  a través de la cual se calcula el flujo es un círculo de radio  $r$  paralelo a las placas, y entonces  $d\vec{S} = r dr d\theta \hat{z}$ . Por otro lado nuestra curva  $C$  es una circunferencia de radio  $r$ , y entonces  $d\vec{l} = r d\theta \hat{\theta}$ . Ahora, es importante entender que el flujo aumentará a medida que aumenta  $r$ , hasta el punto en que  $r > R_0$ , donde da lo mismo qué tan grande sea  $r$ , el flujo no cambiará (será el total de flujo dentro del espacio entre las placas). Esto se representa esquemáticamente en el siguiente dibujo:



Entonces, esta parte del cálculo ( $z \in [0, h]$ ) es muy similar al cálculo del campo magnético dentro y fuera de un cilindro macizo. Partiendo por  $r < R_0$ , tendremos que:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &\Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r) \hat{\theta} \cdot r dr d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{Q(t)}{\pi R_0^2} \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \right] \\ &\Rightarrow 2\pi r B(r) = \frac{2\pi \mu_0 r^2}{2\pi R_0^2} \frac{dQ}{dt} \end{aligned}$$

Ahora, ya que el cambio en la carga que se acumula en las placas está asociado directamente a la corriente eléctrica  $I(t)$ , la conexión entre estas dos cantidades está en que  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ , entonces:

<sup>2</sup>Sabemos que varía en el tiempo por la corriente  $I(t)$ .

$$\Rightarrow B(r, t) = \frac{\mu_0 r}{2\pi R_0^2} I(t)$$

Reemplazando y usando que  $\vec{B} = B\hat{\theta}$ , se tiene que:

$$\Rightarrow \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R_0^2} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \hat{\theta} ; z \in [0, h], r \in (0, R_0] \quad (2)$$

Ahora, para el caso fuera del condensador (pero en  $z \in [0, h]$ ) el flujo que debemos usar en la ley de Ampère es el de todo el condensador, con lo cual la integral va desde  $r = 0$  a  $r = R_0$ , y entonces:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_0^{2\pi} B(r) \hat{\theta} \cdot r dr d\theta \hat{\theta} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \frac{Q(t)}{\pi R_0^2} \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} \right] \\ &\Rightarrow 2\pi r B(r) = \frac{2\pi \mu_0 R_0^2}{2\pi R_0^2} \frac{dQ}{dt} \Rightarrow B(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t) \\ &\Rightarrow \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \hat{\theta} ; z \in [0, h], r \in (R_0, \infty) \quad (3) \end{aligned}$$

Podemos observar que este resultado es idéntico al obtenido para los cables que se conectan al condensador. Entonces, juntando nuestros resultados (1), (2) y (3), y resumiendo en una sola expresión, se tiene que:

$$\vec{B}(r, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R_0^2} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \hat{\theta} & ; \text{ Dentro del condensador.} \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} (1 - e^{-\lambda^2 t}) \hat{\theta} & ; \text{ Fuera del condensador.} \end{cases}$$

Este resultado nos muestra que la intensidad del campo magnético aumenta asintóticamente a lo largo del tiempo, y la dependencia espacial no cambia con respecto a una corriente constante (en el caso de los alambres).

b) Recordando la relación entre el vector desplazamiento  $\vec{D}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ , se tiene que:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{D} \Rightarrow \vec{E}(t) = \frac{Q(t)}{\varepsilon \pi R_0^2} \hat{z}$$

Con esto, hasta ahora podemos decir que el campo eléctrico al interior del condensador es uniforme, apunta en la dirección  $\hat{z}$ , y depende del tiempo, ya que la carga en las placas cambia en el tiempo. Asumiendo que inicialmente las placas tenían una carga de módulo  $Q_0$ , entonces:

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \int_{Q_0}^{Q(t)} dQ = \int_0^t I_0 (1 - e^{-\lambda^2 t}) dt \Rightarrow Q(t) = Q_0 + I_0 \left[ t + \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda^2 t} - 1) \right]$$

Entonces, reemplazando en la expresión para  $\vec{E}$  se obtiene finalmente:

$$\vec{E}(t) = \left[ \frac{Q_0 - \left(\frac{I_0}{\lambda^2}\right)}{\varepsilon \pi R_0^2} + \frac{I_0}{\varepsilon \pi R_0^2} \left( t + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 t} \right) \right] \hat{z} ; \text{ Dentro del condensador.}$$

Se puede notar que el campo eléctrico está compuesto por una parte constante, más una parte que crece (y diverge) a medida que avanza el tiempo. Este resultado tiene sentido ya que la corriente  $I(t) = I_0(1 - e^{-\lambda^2 t})$  converge a  $I_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces las placas se cargarán indefinidamente, y como el campo eléctrico es directamente proporcional a la carga, entonces este también aumenta en magnitud indefinidamente.

- c) Como ninguno de los cálculos para encontrar  $\vec{B}(r, t)$  involucraron el tiempo (sólo para derivar la carga y dejar todo expresado en función de la corriente), entonces podemos simplemente cambiar  $I_0(1 - e^{-\lambda^2 t})$  por  $I_0 \sin(\omega t)$  en nuestro resultado, y de esa forma:

$$\Rightarrow \vec{B}(r, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R_0^2} \sin(\omega t) \hat{\theta} & ; \text{ Dentro del condensador.} \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin(\omega t) \hat{\theta} & ; \text{ Fuera del condensador.} \end{cases}$$

Por otro lado, para el cálculo del campo eléctrico necesitamos integrar la corriente, entonces hacemos el cálculo análogo a lo que hicimos en la parte b):

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \int_{Q_0}^{Q(t)} dQ = \int_0^t I_0 \sin(\omega t) dt \Rightarrow Q(t) = Q_0 + \frac{I_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$$

Entonces:

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = \left[ \frac{Q_0}{\epsilon \pi R_0^2} + \frac{I_0}{\omega \epsilon \pi R_0^2} (1 - \cos(\omega t)) \right] \hat{z} \quad ; \quad \text{Dentro del condensador.}$$

Notamos que la intensidad de ambos campos oscila de forma armónica con período  $\frac{2\pi}{\omega}$ . En cuanto al sentido hacia el cual apuntan los campos, podemos notar que el campo magnético  $\vec{B}$  cambia su sentido a lo largo del tiempo en virtud de que es proporcional a  $\sin(\omega t)$ , una función que cambia de signo constantemente. Por otro lado el cambio de sentido en el campo eléctrico  $\vec{E}$  dependerá de la carga inicial  $Q_0$ . Tomando en cuenta que la función  $1 - \cos(\omega t)$  oscila entre 0 y 2, entonces la carga  $Q(t)$  estará en un rango de valores tal que:

$$Q_0 \leq Q(t) \leq Q_0 + \frac{2I_0}{\omega}$$

Si queremos que el sentido del campo cambie a lo largo del tiempo entonces necesitamos que  $Q(t)$  oscile entre un valor negativo y un valor positivo, entonces necesitamos que:

$$Q_0 < 0 \quad ; \quad Q_0 + \frac{2I_0}{\omega} > 0$$

Esto nos entrega un rango de valores de la carga inicial  $Q_0$  para los cuales el sentido del campo eléctrico también cambia a lo largo del tiempo:

$$-\frac{2I_0}{\omega} < Q_0 < 0$$

Cualquier otro valor de la carga  $Q_0$  hará que el campo eléctrico  $\vec{E}$  mantenga su sentido inicial;  $-\hat{z}$  si la carga  $Q_0$  es lo suficientemente negativa, ó  $\hat{z}$  si la carga  $Q_0$  es positiva.

**P2.- Motor lineal:**

Este tipo de problemas es bastante estándar en el ámbito de la inducción electromagnética, por lo tanto vale la pena comentar todos los aspectos físicos involucrados antes de resolver matemáticamente el ejercicio. Primero, si queremos encontrar la velocidad de un objeto en un instante de tiempo arbitrario, necesitamos tomar en cuenta todas las fuerzas que estén actuando en este objeto, aplicar la 2da ley de Newton para encontrar la ecuación de movimiento, y luego integrar esta ecuación de movimiento hasta llegar a la cantidad cinemática de interés (ya sea la velocidad o la posición). Tomando en cuenta eso, lo primero que debemos hacer es identificar las fuerzas que estén actuando sobre la barra.

Primero, ya que la barra es conductora fluirá una corriente  $I_V$  a través de ella a causa de la diferencia de potencial  $V$  que se aplica en el circuito. En virtud de esto y del campo magnético  $B_0$  perpendicular a la barra, aparecerá una fuerza  $\vec{F}_l$  (fuerza de Lorentz) que tiene como consecuencia un movimiento de la barra a lo largo de los rieles. Por otro lado, ya que el circuito es cerrado existe un flujo  $\Phi$  que lo atraviesa asociado al campo magnético  $B_0$ , y si existe una variación de este flujo magnético a lo largo del tiempo, entonces la ley de Faraday nos dice que se induce una f.e.m. en el circuito, lo cual induce una corriente adicional  $I_B$  en la barra, ya que es conductora. Existen tres formas principales por las cuales el flujo  $\Phi$  de campo magnético puede variar a lo largo del tiempo:

- I) El flujo  $\Phi$  está asociado a un campo magnético  $B(t)$  que varía explícitamente en el tiempo.
- II) El área  $A(t)$  por la cual el campo magnético fluye varía explícitamente en el tiempo.
- III) Tanto el campo magnético  $\vec{B}$  y el área  $A$  son constantes, pero la orientación relativa entre ambos elementos cambia con el tiempo (esto pasa, por ejemplo, si el circuito rota).

Como en el caso de este ejercicio el campo magnético es constante y el circuito no cambia su orientación, la única forma en que puede variar el flujo  $\Phi$  de campo magnético es que el área del circuito varíe en el tiempo. En el instante inicial la barra está en reposo, y cuando activamos la diferencia de potencial  $V$  aparece la corriente  $I_V$  que combinada con el campo magnético  $B_0$  hace que la barra comience a desplazarse hacia la derecha<sup>3</sup>. Este desplazamiento a lo largo de los rieles hace que el área del circuito cambie, lo que significa que luego del instante inicial se induce una f.e.m., y por lo tanto una corriente adicional en la barra, la cual debe tomarse en consideración<sup>4</sup> al momento de calcular la fuerza que siente la barra en un tiempo arbitrario y que la mantiene en movimiento a lo largo de los rieles. Dicho esto, la corriente  $I$  que atraviesa la barra está dada por:

$$I = I_V + I_B \Rightarrow I = \frac{V}{R} + \frac{\varepsilon}{R} \quad (4)$$

En esta última expresión  $\varepsilon$  es la f.e.m. inducida en el circuito, la cual se relaciona con el flujo de campo magnético  $\Phi$  a través de la ley de Faraday:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Usamos un sistema de referencia con ejes cartesianos de tal forma que  $\hat{i}$  apunta hacia la derecha en la figura del enunciado,  $\hat{j}$  apunta hacia dentro de la página, y  $\hat{k}$  apunta hacia arriba paralelo a la página. Por

<sup>3</sup>Esto puede inferirse a partir de la expresión  $\vec{F}_l = q(\vec{v} \times \vec{B})$  tomando en cuenta que  $\vec{v}$  va en  $\hat{j}$  y  $\vec{B}$  en  $\hat{k}$ .

<sup>4</sup>Para simplificar el desarrollo del ejercicio estamos ignorando el flujo del campo magnético que generan los cables del circuito, y estamos ignorando la f.e.m. de movimiento que se produce entre los extremos de la barra conductora por el movimiento horizontal de esta.

otro lado ubicamos el origen de tal forma que la posición  $x = 0$  corresponde a la posición horizontal inicial de la barra, e  $y = 0$  corresponde a la altura del extremo inferior de esta. Con esto se tiene que  $\vec{B} = B_0\hat{k}$ , y como el área que forma el circuito es paralela al plano  $XY$  usamos  $d\vec{S} = dx dy \hat{k}$  para el diferencial de área para el cálculo del flujo, entonces:

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_0^x (B_0\hat{k}) \cdot dx dy \hat{k} = \int_0^L \int_0^x B_0 dx dy \Rightarrow \Phi = B_0 L x$$

Con esto podemos calcular la derivada temporal del flujo  $\Phi$ , y usando  $\dot{x} = v$  como la velocidad de la barra en un instante arbitrario tendremos que:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(B_0 L x) = -B_0 L \dot{x} \Rightarrow \varepsilon = -B_0 L v$$

Reemplazando este resultado en la expresión (4) tendremos la corriente total que pasa a través de la barra conductora en un instante de tiempo arbitrario:

$$\Rightarrow I = \frac{V}{R} - \frac{B_0 L v}{R} \quad (5)$$

Ahora, con esta corriente podemos calcular la fuerza de Lorentz que la barra siente como consecuencia del campo magnético  $B_0\hat{k}$ . Usando  $d\vec{\ell} = dy\hat{j}$  e integrando desde el extremo inferior al extremo superior de la barra (asumiendo que la corriente fluye en sentido antihorario) se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_l = \int_{\Gamma} I d\vec{\ell} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_l = \int_0^L I (dy\hat{j}) \times (B_0\hat{k})$$

Como la corriente  $I$  no depende de la coordenada  $y$ , entonces puede salir de la integral (junto con  $B_0$ ), y al reemplazarla por la expresión encontrada en (5) se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_l = I B_0 \int_0^L dy \hat{i} \Rightarrow \vec{F}_l = \left( \frac{V B_0 L}{R} - \frac{B_0^2 L^2 v}{R} \right) \hat{i}$$

Esta fuerza corresponde a la fuerza que la barra siente producto de la interacción con el campo magnético. La otra fuerza que actúa sobre la barra corresponde a la tensión de la cuerda, la cual se relaciona a la vez con el peso del bloque de masa  $m$  que cuelga del otro extremo. Si usamos  $F_T$  para la magnitud de la tensión en la cuerda, al aplicar la 2da ley de Newton a la barra<sup>5</sup> se tiene lo siguiente:

$$M\vec{a} = \vec{F}_{\text{neta}} \Rightarrow M\ddot{x}\hat{i} = -F_T\hat{i} + \left( \frac{V B_0 L}{R} - \frac{B_0^2 L^2 v}{R} \right) \hat{i} \Rightarrow \frac{V B_0 L}{R} - \frac{B_0^2 L^2 v}{R} - F_T = M\dot{v} \quad (6)$$

En la última expresión se usó que  $\ddot{x} = \dot{v}$  es la aceleración de la barra a lo largo del eje horizontal. Ahora, ya que la tensión no es un dato requerimos de otra ecuación para completar nuestro sistema de ecuaciones y poder despejar  $\dot{v}$ , la cual se obtiene a partir de la 2da ley de Newton, pero esta vez aplicada al bloque de masa  $m$ . Ya que este bloque está colgando sólo debemos considerar la tensión de la cuerda (que en este caso es positiva) y el peso  $-mg$  del bloque, y ya que la cuerda siempre permanece tensa requerimos que

<sup>5</sup>La barra siente otras fuerzas más, como su peso y fuerzas de contacto con los cables en los cuales se apoya, sin embargo, como estas fuerzas no afectan a la dinámica en el eje horizontal, no las estamos considerando.

tanto el bloque como la barra tengan la misma aceleración, es decir,  $\ddot{x} = \dot{v}$ . Entonces, si aplicamos la 2da ley de Newton al bloque que cuelga se tiene lo siguiente:

$$F_T - mg = m\ddot{x} \Rightarrow F_T - mg = m\dot{v} \quad (7)$$

Entonces, con las expresiones (6) y (7) podemos armar un sistema de ecuaciones para despejar las incógnitas  $F_T$  y  $\dot{v}$ . Primero, a partir de la expresión asociada al bloque podemos despejar la magnitud de la tensión:

$$\Rightarrow F_T = m\dot{v} + mg$$

Ahora, reemplazando esto en la expresión (6) seremos capaces de encontrar una EDO para  $v$ :

$$\frac{VB_0L}{R} - \frac{B_0^2L^2v}{R} - m\dot{v} - mg = M\dot{v} \Rightarrow \dot{v} + \frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}v = \frac{VB_0L}{(M+m)R} - \frac{mg}{M+m}$$

Esta EDO corresponde a una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales recordamos que la solución general  $v(t)$  puede escribirse como una suma entre la solución  $v_h(t)$  de la EDO homogénea, más otra solución particular<sup>6</sup>  $v_p(t)$  específica que cumpla la EDO mostrada anteriormente. La EDO homogénea corresponde a la misma ecuación diferencial, pero tomando el lado derecho igual a cero, entonces:

$$\dot{v}_h + \frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}v_h = 0$$

La solución de esta EDO corresponde a una función exponencial cuyo exponente es el negativo de la constante que acompaña a  $v$ . Entonces:

$$\Rightarrow v_h(t) = v_0 e^{-\frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}t}$$

Para la solución particular  $v_p$ , ya que la EDO es de primer orden y el lado derecho es solamente una constante, la solución particular también será una constante, de tal forma que  $\dot{v}_p = 0$ . Entonces, reemplazando en la EDO y despejando:

$$\begin{aligned} \dot{v}_p + \frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}v_p &= \frac{VB_0L}{(M+m)R} - \frac{mg}{M+m} \Rightarrow \frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}v_p = \frac{VB_0L}{(M+m)R} - \frac{mg}{M+m} \\ \Rightarrow v_p &= \frac{V}{B_0L} - \frac{mgR}{B_0^2L^2} \end{aligned}$$

Entonces, como  $v(t) = v_h + v_p$  se tiene que:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B_0^2L^2}{(M+m)R}t} + \frac{V}{B_0L} - \frac{mgR}{B_0^2L^2}$$

<sup>6</sup>Esta parte es la complicada, pero para los casos en donde la expresión del lado derecho es una constante, la solución particular es sencilla de obtener.



Para encontrar la constante  $v_0$  usamos la condición inicial de que la barra parte del reposo, por lo tanto  $v(0) = 0$ , y así:

$$v(0) = 0 \Rightarrow v_0 + \frac{V}{B_0 L} - \frac{mgR}{B_0^2 L^2} = 0 \Rightarrow v_0 = -\left(\frac{V}{B_0 L} - \frac{mgR}{B_0^2 L^2}\right)$$

Finalmente, al reemplazar esta constante en la solución para  $v(t)$  y reagrupando tendremos una expresión para la velocidad de la barra en un instante arbitrario:

$$v(t) = -\left(\frac{V}{B_0 L} - \frac{mgR}{B_0^2 L^2}\right) e^{-\frac{B_0^2 L^2}{(M+m)R}t} + \frac{V}{B_0 L} - \frac{mgR}{B_0^2 L^2} \Rightarrow \boxed{v(t) = \left(\frac{V}{B_0 L} - \frac{mgR}{B_0^2 L^2}\right) \left(1 - e^{-\frac{B_0^2 L^2}{(M+m)R}t}\right)}$$

Podemos notar que la barra siempre avanza en el mismo sentido (la velocidad jamás cambia de signo), sin embargo, podemos ver que la velocidad aumenta asintóticamente hasta un valor terminal. Esto tiene sentido, ya que al ir aumentando el área del circuito aumentará el flujo de campo magnético, por lo tanto su derivada será positiva e irá aumentando de magnitud. Tomando en cuenta eso, ya que la f.e.m. inducida es proporcional al negativo de este cambio (y la corriente  $I_B$  es proporcional a esta f.e.m.), la corriente que aparece por el flujo de campo magnético aumenta hasta oponerse lo suficiente al efecto generado por la corriente de la fuente de poder, lo que permite alcanzar un equilibrio de fuerzas (tomando en cuenta que también existe la tensión). Como se alcanza un equilibrio de fuerzas (aceleración nula), pero en ese punto ya se tiene una velocidad, se alcanza el régimen de velocidad terminal.