FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesora: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 1

Axiomas de Cuerpo de los Reales

P1 Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes reglas de signos:

a) $\forall a \in \mathbb{R},\ -(-a) = a$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \cdot (-b) = -ab$

c) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ (-a) \cdot (-b) = ab$

P2 Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes identidades:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b} = (a+b)(a^{-1} - b^{-1})$

b) $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ ab^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}$

P3 Usando las propiedades básicas de los números reales, demuestre las siguientes implicancias:

a) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ -a = -b \implies a = b$

b) $\forall a \in \mathbb{R},\ a^3 = 0 \implies a = 0$

Obs. Recordar que las potencias naturales se definen de forma recursiva, es decir,
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x^2 \cdot x, \ldots$

P4 Utilizando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente igualdad:

$$\frac{4}{2} = 2$$

Obs. Recordar que los números naturales se definen de forma recursiva, es decir,
$2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ 4 = 3 + 1, \ldots$

P5 **[Propuesto]** Usando los axiomas y las propiedades básicas de los números reales, demuestre la siguiente implicancia:

$$\forall x, y, z, w \in \mathbb{R},\ (xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \implies xz = yw$$

Axiomas de Cuerpo

Axioma 1 (Conmutatividad).

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y = y + x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \cdot y = y \cdot x$$

Axioma 2 (Asociatividad).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Axioma 3 (Distributividad).

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Axioma 4.A (Existencia de elemento neutro para la suma).

$$\exists e \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + e = x$$

Teorema. *El elemento neutro para la suma es único, y lo denotaremos* 0

Axioma 4.B (Existencia de elemento neutro para el producto).

$$\exists e \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot e = x$$

Teorema. *El elemento neutro para el producto es único, y lo denotaremos* 1

Obs. $1 \neq 0$

Axioma 5.A (Existencia de elementos inversos para la suma).

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists \bar{x} \in \mathbb{R},\ x + \bar{x} = 0$$

A $\bar{x}$ se le llama el opuesto o inverso aditivo de x

Teorema. *Para cada $x \in \mathbb{R}$, el opuesto de x es único, y lo denotaremos* $-x$

Axioma 5.B (Existencia de elementos inversos para el producto).

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists \hat{x} \in \mathbb{R},\ x \cdot \hat{x} = 1$$

A $\hat{x}$ se le llama el recíproco o inverso multiplicativo de x

Teorema. *Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, el recíproco de x es único, y lo denotaremos* x^{-1}

Definición (Diferencia y Cuociente).

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a - b := a + (-b)$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0,\ \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$$