MA1001-5 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 4

Cónicas

P1 Identifique el lugar geométrico que definen las siguientes relaciones, señalando sus elementos principales.

$$A : 9x^2 + 16y^2 - 36x - 96y + 36 = 0$$
$$B : 64x^2 - y^2 = 64x + 32$$
$$C : x^2 + 16 = 4y - 4x - 4$$

P2 Desde un punto P en el plano, se traza una recta con pendiente 6, y otra con pendiente opuesta, y se cumple que el producto de sus coeficientes de posición es igual a 3.
Determine cuál es el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen lo anterior.

P3 Sea $r > 0$ y $\mathcal{C}$ una circunferencia tal que $(r, 0)$ y el origen son los extremos de uno de sus diámetros. Determine el lugar geométrico de los centros de circunferencias que son tangentes a $\mathcal{C}$ y al eje OY (en puntos distintos).

P4 Sea $a > 0$. Considere la hipérbola equilátera $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = a^2$ y un punto $(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro (x_0, y_0) que es tangente al eje OY. Se definen los puntos A y B como las intersecciones de $\mathcal{C}$ con el eje OX. Demuestre que $d(A, B) = 2a$.

P5 **[Propuesto]** Sean $a, b > 0$. Considere el lugar geométrico dado por:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a) Pruebe que la recta $L : y = mx + n$, es tangente a $\mathcal{E}$, si y solo si:

$$a^2m^2 = n^2 - b^2$$

b) Determine el lugar geométrico de todos los puntos P que son intersecciones de rectas L_1 y L_2 que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1) $L_1 \perp L_2$
2) L_1 y L_2 son tangentes a $\mathcal{E}$

Def (Cónica)**.** Sea D una recta, $F \notin D$ un punto del plano y $e > 0$:

$$\mathcal{C} \text{ es una cónica} \iff \mathcal{C} = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P, F) = e \cdot d(P, D)\}$$

Donde F es el foco, D es la directriz y e es la excentricidad de la cónica.

- **Recta:**
  $y = mx + n$

Elementos	Fórmula
Pendiente:	m
Coef. de posición:	n

- **Circunferencia:**
  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Elementos	Fórmula
Centro:	(x_0, y_0)
Radio:	$r > 0$

- **Parábola horizontal:**
  $4p(x - x_0) = (y - y_0)^2$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = 1$
Foco:	$(x_0 + p, y_0)$
Directriz:	$x = x_0 - p$
Vértice:	(x_0, y_0)
Apertura:	$p > 0 \ \subset ; \ p < 0 \ \supset$

- **Parábola vértical:**
  $4p(y - y_0) = (x - x_0)^2$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = 1$
Foco:	$(x_0, y_0 + p)$
Directriz:	$y = y_0 - p$
Vértice:	(x_0, y_0)
Apertura:	$p > 0 \cup ; \ p < 0 \cap$

- **Elipse horizontal:**
  $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
Focos:	$(x_0 \pm ae, y_0)$
Directrices:	$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$
Centro:	(x_0, y_0)
Propiedad:	$PF + PF' = 2a$

- **Elipse vértical:**
  $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ con $b > a$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$
Focos:	$(x_0, y_0 \pm be)$
Directrices:	$y = y_0 \pm \frac{b}{e}$
Centro:	(x_0, y_0)
Propiedad:	$PF + PF' = 2b$

- **Hipérbola horizontal:**
  $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
Vértices:	$(x_0 \pm a, y_0)$
Focos:	$(x_0 \pm ae, y_0)$
Directrices:	$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$
Centro:	(x_0, y_0)
Asíntotas:	$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$
Propiedad:	$\lvert PF - PF' \rvert = 2a$

- **Hipérbola vértical:**
  $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$

Elementos	Fórmula
Excentricidad:	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$
Vértices:	$(x_0, y_0 \pm b)$
Focos:	$(x_0, y_0 \pm be)$
Directrices:	$y = y_0 \pm \frac{b}{e}$
Centro:	(x_0, y_0)
Asíntotas:	$x - x_0 = \pm\frac{a}{b}(y - y_0)$
Propiedad:	$\lvert PF - PF' \rvert = 2b$