FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 5

Funciones

P1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, demuestre que $(0,0) \in G_f$. ¿la propiedad se mantiene al cambiar el dominio por otro conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$?

P2 Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones, tales que f es creciente y g es decreciente. Pruebe que la función $h(x) = f(x) - g(x)$ es una función decreciente

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 2 y periódica de periodo 3. Demuestre que $f|_{\mathbb{Z}}$ es constante.

P4 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2 - 4|x| + 3$$

a) Estudie su dominio, ceros, signos y paridad

b) Determine los intervalos de crecimiento de f

c) Determine el conjunto imagen de f

P5 Sea la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la regla $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Estudie su dominio, ceros, signos y paridad

b) Determine los intervalos de crecimiento de f

c) Determine el conjunto imagen de f

P6 [Propuesto] Considere las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x| - \sqrt{4 - x^2}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$

Estudie dominio, ceros, signos, paridad y crecimiento de ambas funciones.

P7 [Propuesto] Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice aditiva si tiene la siguiente propiedad:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Demuestre que toda función aditiva es impar.

Def. El **gráfico** (o **grafo**) de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función. Llamaremos **ceros** de f al conjunto:

$$f^{-1}(0) = \{x \in A : f(x) = 0\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ función. Se define el conjunto **imagen** (o **recorrido**) de f como:

$$f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función, diremos que:

- f es **positiva** en $C \subseteq A$ si $f(x) > 0$ para todo $x \in C$
- f es **negativa** en $C \subseteq A$ si $f(x) < 0$ para todo $x \in C$
- f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **periódica** si existe un $T > 0$ (periodo) tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **creciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f es **estrictamente creciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f es **decreciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- f es **estrictamente decreciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f es **monótona** si f es creciente o decreciente
- f es **acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$
- f es **acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$
- f es **acotada** si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in A$

Def. Decimos que $x_0 \in Dom(f)$ es un **punto mínimo** de f, si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$, o equivalentemente

$$f(x_0) = \min_{x \in Dom(f)} f(x)$$

Análogamente, $x_0 \in Dom(f)$ es un **punto máximo** de f, si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$, o equivalentemente

$$f(x_0) = \max_{x \in Dom(f)} f(x)$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq A$. Se llama **restricción** de f en B a la función:

$$f|_B : B \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall x \in B,\ f|_B(x) = f(x)$$