FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 6

P1 Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones. Demuestre que:

a) Si f es par y g es impar, entonces $f \circ g$ es par

b) Si f es decreciente y g es creciente, entonces $f \circ g$ es decreciente

P2 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que:

a) Si f es estrictamente creciente, entonces es inyectiva

b) Si f es periódica, entonces no es inyectiva

c) Si f es acotada, entonces no es sobreyectiva.

P3 Sea f una función impar y biyectiva. Demuestre que la inversa de f también es impar.

P4 Considere la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

a) Estudie su dominio, ceros, signos y paridad.

b) Estudie los intervalos de crecimiento de f.

c) ¿Es f inyectiva?, ¿es sobreyectiva?

d) Calcule $f((1, \infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \overline{f} :& (1, \infty) \to f((1, \infty)) \\ & x \mapsto \overline{f}(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

P5 [Propuesto] Sea $f(x) = \sqrt{x - [x]}$. Estudie dominio, ceros, signos, paridad, periodicidad, acotamiento, inyectividad y sobreyectividad de f.

P6 [Propuesto] Se dice que $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función lineal, si cumple lo siguiente:

- $\forall x, y \in A,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall x \in A, \forall c \in \mathbb{R},\ f(cx) = cf(x)$

Demuestre que:

a) Si f, g son funciones lineales, entonces $f \circ g$ es lineal.

b) Si f es lineal y biyectiva, entonces f^{-1} es lineal.

Def. El **gráfico** (o **grafo**) de una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto:

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función. Llamaremos **ceros** de f al conjunto:

$$f^{-1}(0) = \{x \in A : f(x) = 0\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ función. Se define el conjunto **imagen** (o **recorrido**) de f como:

$$f(A) = \{f(x) \in B : x \in A\}$$

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una función, diremos que:

- f es **positiva** en $C \subseteq A$ si $f(x) > 0$ para todo $x \in C$
- f es **negativa** en $C \subseteq A$ si $f(x) < 0$ para todo $x \in C$
- f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **periódica** si existe un $T > 0$ (periodo) tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in A$
- f es **creciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
- f es **estrictamente creciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$
- f es **decreciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$
- f es **estrictamente decreciente** en $C \subseteq A$ si $\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$
- f es **monótona** si f es creciente o decreciente
- f es **acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$
- f es **acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$
- f es **acotada** si existen $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in A$
- f es **inyectiva** si $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- f es **epiyectiva** (o **sobreyectiva**) si $\forall y \in B, \exists x \in A,\ y = f(x)$
- f es **biyectiva** si f es inyectiva y epiyectiva

Def. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $B \subseteq A$. Se llama **restricción** de f en B a la función:

$$f|_B : B \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \forall x \in B,\ f|_B(x) = f(x)$$

Def. Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Se define la **función inversa** de f como la función $f^{-1} : B \to A$ definida por la relación:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$