MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 9

Axioma del Supremo

P1 [Caracterización del supremo] Sea $s \in \mathbb{R}$ cota superior de A, pruebe que:

$$s = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : s - \epsilon < a$$

Deduzca una caracterización similar para el ínfimo.

P2 Considere el conjunto:

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

Estudie el acotamiento de $\mathcal{A}$ y encuentre su ínfimo, supremo, máximo y mínimo si es que existen. Justifique sus respuestas.

P3 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados tales que $A \subseteq B$, pruebe que:

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$$

P4 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos y acotados superiormente, pruebe que:

a) $\sup(A \cup B)$ existe.

b) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$

P5 [Propuesto] ¿Qué puede decir sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sup(A) = \inf(A)$?. Justifique

Def (Acotamiento)**.** Sea $A \subseteq \mathbb{R}$:, diremos que:

$$A \text{ es acotado superiormente } \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$

$$A \text{ es acotado inferiormente } \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq m$$

$$A \text{ es acotado } \Leftrightarrow A \text{ es acotado superior e inferiormente}$$

Diremos que M es cota superior de A y m es cota inferior de A

Def (Máximo y Mínimo)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$, diremos que:

$$M \text{ es máximo de } A \Leftrightarrow M \in A \wedge M \text{ es cota superior de } A$$

$$m \text{ es mínimo de } A \Leftrightarrow m \in A \wedge m \text{ es cota inferior de } A$$

Def (Supremo e Ínfimo)**.** Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $s, u \in \mathbb{R}$, diremos que:

$$s \text{ es supremo de } A \Leftrightarrow s \text{ cota superior } \wedge \forall M \text{ cota superior de } A,\ s \leq M$$

$$u \text{ es ínfimo de } A \Leftrightarrow u \text{ cota inferior } \wedge \forall m \text{ cota inferior de } A,\ u \geq m$$

Prop. *Si el máximo (o mínimo/supremo/ínfimo) existe, entonces es único*

Axioma 1 (Axioma del Supremo)**.**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \phi \wedge A \text{ acot. sup. } \Rightarrow \exists s \text{ supremo de } A$$

Prop (Propiedad del Ínfimo)**.**

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \phi \wedge A \textit{ acot. inf. } \Rightarrow \exists u \textit{ ínfimo de } A$$

Def (Parte entera)**.** Se define la parte entera de $x > 0$ como $[x] := \sup\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$

Prop. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [x] \leq x < [x] + 1$

Teorema. *Los naturales no son acotados superiormente.*

Teorema (Propiedad Arquimediana)**.** $\mathbb{R}$ *es Arquímediano, es decir:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot \varepsilon > 1$$

Def. Se define la raíz de un número $x \geq 0$ como:

$$\sqrt{x} = \sup\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq x\}$$

Teorema. *Los racionales son densos en* $\mathbb{R}$*, es decir:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$

Teorema. *Los irracionales son densos en* $\mathbb{R}$*, es decir:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y, \exists i \in \mathbb{I} : x < i < y$$