**MA1001-1 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Diana Narváez
**Auxiliar:** Nicolás Cornejo

# Auxiliar 11

## Convergencia de sucesiones

**P1** Demuestre los siguientes límites usando la definición de convergencia de sucesiones

*a)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{9-\frac{1}{n}} = 3$

*b)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n\cos(4n^2)}{2n^3+5} = 0$

**P2** Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Z}$ una sucesión convergente. Demuestre que a partir de cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, la sucesión se vuelve constante, es decir, existe un $L \in \mathbb{R}$ tal que $x_n = L$ para todo $n \geq n_0$

**P3** Calcule los siguientes límites (si existen):

*a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{|2n+1|^3 - [n^2+1]}{1+n+2n^2+3n^3}$

*b)* $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sqrt{n+1}$

*c)* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3}$

*d)* $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+(-1)^n}{n-\cos(n!)}$

**P4** Calcule el siguiente límite de sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n-1)}{n^3-1} + \frac{10}{n!}\sin(n^4) - \frac{6n^5+2n-3}{5-2n^5}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{n^n}{2n^n-n!} - \frac{(1000)^n}{n!}}$$

**P5** **[Propuesto]** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ dos sucesiones tales que $a_n \to \ell$ y $|a_n - b_n| \to 0$. Use la definición de convergencia para probar que $b_n \to \ell$

**P6** **[Propuesto]** Calcule los siguientes límites (si existen):

*a)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2023n+851}{n^5}$

*b)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{25+\frac{13}{n}} - 5$

*c)* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-(-1)^n}{n^2+n\cos(n^n)}$

*d)* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

*e)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\arcsin(\cos(n^2))}{n^2+n}$

*f)* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{k-n}$

*g)* $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!\sin(n!))^2+(-3n)^n}{n^{n+1}(n-1)!}$

*h)* $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{1+(n+1)!}$

**Def** (Sucesión)**.** Una sucesión es una función $s : A \subseteq \mathbb{N} \to B \subseteq \mathbb{R}$, con $\mathbb{N}\backslash A$ finito. Usualmente esto se denotará como $(s_n)_{n\in A} \subseteq B$ (o simplemente $(s_n)$) y sus imágenes se anotarán como $s(n) = s_n$, además se anotará informalmente a la sucesión como una lista de números:

$$(s_n) = (s_0, s_1, s_2, s_3, ...)$$

**Def** (Convergencia)**.** Diremos que la sucesión $(s_n)$ converge a $L$ (denotado como $s_n \to L$) si se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |s_n - L| < \epsilon$$

En tal caso diremos que $L$ es el límite de la sucesión, es decir: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = L$

**Teorema.** *El límite de una sucesión es único.*

**Def.** Diremos que una sucesión es nula si converge a 0

**Def.** Diremos que una sucesión $(s_n)$ está acotada si:

$$\exists M > 0 : \forall n \in A, |s_n| \leq M$$

**Teorema.** *Sean $(u_n), (v_n)$ sucesiones, entonces se cumple lo siguiente:*

1. *$(u_n)$ es nula $\Leftrightarrow$ $(|u_n|)$ es nula*
2. *Suma y producto de nulas es nula*
3. *Suma y producto de acotadas es acotada*
4. *Nula por acotada es nula*
5. *$(s_n) \to L \Leftrightarrow (s_n - L)$ es nula*
6. *Convergente implica acotada*
7. *$(s_n)$ es nula entonces $(\frac{1}{s_n})$ es no acotada*
8. *$(s_n)$ convergente no nula $\Rightarrow (\frac{1}{s_n})$ es acotada*

**Teorema** (Álgebra de límites)**.** *Sean $(a_n), (b_n)$ dos sucesiones convergentes a $a$ y $b$ respectivamente. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces las sucesiones $(a_n + b_n), (a_n \cdot b_n)$ y $(\lambda a_n)$ convergen a $a + b, a \cdot b$ y $\lambda a$ respectivamente. Si además $b \neq 0$ se tiene que $(\frac{a_n}{b_n})$ converge a $\frac{a}{b}$.*

**Prop** (Límites útiles)**.** *Se tienen los siguientes límites:*

- *Sean $P(n), Q(n)$ polinomios de grados $p$ y $q$ con coeficientes $\{a_p, ..., a_0\}$ y $\{b_q, ..., b_0\}$ respectivamente, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q} & \text{si } p = q \\ \nexists & \text{si } p > q \end{cases}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$