FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

**MA1001-1 Introducción al Cálculo**
**Profesor:** Diana Narváez
**Auxiliar:** Nicolás Cornejo

# Auxiliar 12

**P1** Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ una constante, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{[\alpha k^2]}{n^3}$$

**P2** Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

*a)* $\dfrac{4^{n+1} + n^2 3^n}{n^2 \cos(n) + 2^{2n}}$

*b)* $\left(\dfrac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{3n}$

*c)* $\left(1 + n^5 \left(\dfrac{n + \sin(n)}{3n+1}\right)^n\right)^n$

*d)* $\sqrt[n]{n \cdot 3^n + 3 \cdot 5^n}$

**P3** Considere la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$a_1 = a \in (0,1) \qquad a_{n+1} = a_n(2 - a_n)$$

*a)* Demuestre que $a_n \in (0,1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

*b)* Demuestre que $(a_n)$ es estrictamente creciente.

*c)* Concluya que la sucesión $(a_n)$ es convergente y calcule su límite.

**P4 [Propuesto]** Estudie los siguientes límites de sucesiones:

*a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+1}{2n^2+n}\right)^n$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n-2} + 2n^2}{(-2)^n - n!}$

*c)* $\lim\limits_{n\to\infty} n^{2023} \left(\dfrac{n}{2n+3}\right)^n$

*d)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{n^5 + 2n^2}{n^3}\right)^2}$

*e)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$

*f)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} \cdot \left[\dfrac{n}{3}\right]$

**P5 [Propuesto]** Considere la sucesión $(a_n)$ definida por:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Use el TSM para ver que $(a_n)$ es convergente y pruebe que $\frac{1}{2} \leq \lim a_n < 1$

**P6 [Propuesto]** Sean $x, y > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, usando una desigualdad de Bernoulli pruebe que:

$$(x+y)^n \geq x^n + nx^{n-1}y$$

**Teorema.** *Si* $a_n \to a$, $b_n \to b$ *y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$, *entonces* $a \leq b$

**Teorema** (Sándwich)**.** *Sean* $(a_n), (b_n), (s_n)$ *sucesiones tales que* $a_n \to \ell$, $b_n \to \ell$ *y existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $a_n \leq s_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$, *entonces* $(s_n)$ *es convergente y* $s_n \to \ell$

**Prop 1** (Bernoulli I)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > -1,\ (1+h)^n \geq 1 + nh$$

**Prop 2.** *Sea* $q \in \mathbb{R}$, *entonces:*

$$\lim q^n = \begin{cases} 0 & \textit{si } q \in (-1,1) \\ 1 & \textit{si } q = 1 \\ \nexists & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

**Prop 3.** *Sea* $q_n \to q$. *Si* $|q| < 1$, *entonces* $(q_n)^n$ *es nula, si* $|q| > 1$, *entonces* $(q_n)^n$ *es no acotada*

**Prop 4.** *Si* $a_n \to a$ *con* $a > 0$, *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

**Prop 5** (Bernoulli II)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0,\ (1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)h^2}{2}$$

**Prop 6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

**Prop 7.** *Sea* $q \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{N}$, *entonces:*

$$\lim n^k q^n = \begin{cases} 0 & \textit{si } q \in (-1,1) \\ \nexists & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

**Prop 8** (Bernoulli III)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall -1 < h < \frac{1}{n},\ (1+h)^n \leq \frac{1}{1-hn}$$

**Prop 9.** *Si* $(h_n)$ *y* $(nh_n)$ *son sucesiones nulas, entonces* $(1+h_n)^n \to 1$

**Teorema** (TSM)**.** *Sea* $(s_n)$ *una sucesión:*

$$(s_n) \textit{ creciente y acotada superiormente } \Rightarrow (s_n) \textit{ converge } \wedge \lim_{n\to\infty} s_n = \sup\{\, s_n \,:\, n \geq n_0 \,\}$$

$$(s_n) \textit{ decreciente y acotada inferiormente } \Rightarrow (s_n) \textit{ converge } \wedge \lim_{n\to\infty} s_n = \inf\{\, s_n \,:\, n \geq n_0 \,\}$$