MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Auxiliar 15

P1 Demuestre los siguientes límites usando las definiciones $(\varepsilon, \delta, m, M)$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = 3$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to -2^+} \frac{2-x}{x^2-4} = -\infty$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+1}{5x-1} = \frac{2}{5}$

P2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ \ x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & si\ \ x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Estudie los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x)$

P3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la siguiente relación:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)^3}{4\operatorname{sen}(ax)} & \text{si } x > 0 \\ 7 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1-\cos(x)}{(2^{bx}-1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, determine la relación entre a y b.

P4 [Propuesto] Calcule los siguientes límites de funciones:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x-\pi}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 3^x}{\ln(x+1)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt[7]{x}-1}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x+1}{x-1}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x-4}{x-3}\cos(x\pi)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(9x)}{1-\cos(5x)}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(\sin(x)))}{x^2}$

P5 [Propuesto] Demuestre los siguientes límites usando las definiciones $(\varepsilon, \delta, m, M)$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} 2 - x = 1^-$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = 0$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 - 1 = +\infty$

Def. Para caracterizar $\lim\limits_{x \to A} f(x) = B$ tenemos 25 combinaciones posibles

A determina si se usa δ o m:

- Si $A = x_0$, entonces es:

$$\forall ..., \exists \delta > 0, \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \implies ...$$

- Si $A = x_0^+$, entonces es:

$$\forall ..., \exists \delta > 0, \forall x \in A, x_0 < x < x_0 + \delta \implies ...$$

- Si $A = x_0^-$, entonces es:

$$\forall ..., \exists \delta > 0, \forall x \in A, x_0 - \delta < x < x_0 \implies ...$$

- Si $A = +\infty$, entonces es:

$$\forall ..., \exists m > 0, \forall x \in A, x > m \implies ...$$

- Si $A = -\infty$, entonces es:

$$\forall ..., \exists m < 0, \forall x \in A, x < m \implies ...$$

B determina si se usa ε o M:

- Si $B = \ell$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists ..., \forall x \in A, ... \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- Si $B = \ell^+$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists ..., \forall x \in A, ... \implies \ell < f(x) < \ell + \varepsilon$$

- Si $B = \ell^-$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists ..., \forall x \in A, ... \implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell$$

- Si $B = +\infty$, entonces:

$$\forall M > 0, \exists ..., \forall x \in A, ... \implies f(x) > M$$

- Si $B = -\infty$, entonces:

$$\forall M < 0, \exists ..., \forall x \in A, ... \implies f(x) < M$$