FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Diana Narváez
Auxiliar: Nicolás Cornejo

Pauta Auxiliar 16

P1 Determine todo tipo de asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10}$ *b)* $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$ *c)* $h(x) = \dfrac{x^2}{(1 + e^x)(x - 3)}$

Obs. La mayoría de los límites involucrados en esta pregunta se pueden calcular con L'Hopital.

Sol.

a) Notamos que el denominador es $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x + 5)$, luego, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-5, 2\}$. Además, es interesante notar que el numerador se factoriza como:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 - 1)$$

- **(Verticales)** Los posibles candidatos a asíntota vertical son $x = -5$ y $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x + 5)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x + 5} = \frac{2^2 - 1}{2 + 5} = \frac{3}{7}$$

De aquí concluimos que $x = 2$ no es una asíntota vertical. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -5^+} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 3x - 10} &= \lim_{x \to -5^+} \frac{(x - 2)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x + 5)} \\
&= \lim_{x \to -5^+} (x^2 - 1) \cdot \lim_{x \to -5^+} \frac{1}{x + 5} \\
&= ((-5)^2 - 1) \cdot \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \qquad C.V : u = x + 5 \\
&= 24 \cdot (+\infty) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Luego, la única asíntota vertical de f es la recta $x = -5$

- **(Oblicuas)** Como la función es racional, los límites involucrados serán iguales en $+\infty$ y $-\infty$, calculemos m y n.

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 + 3x^2 - 10x} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{10}{x^2}} \\
&= \frac{1 - 0 - 0 + 0}{1 + 0 - 0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+3x-10} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2-x+2-x(x^2+3x-10)}{x^2+3x-10} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2+9x+2}{x^2+3x-10} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5+\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} \\
&= \frac{-5+0+0}{1+0-0} \\
&= -5
\end{aligned}$$

Luego, la recta $y = x - 5$ es la asíntota oblicua hacia $+\infty$ y $-\infty$

- **(Horizontales)** Como vimos oblicuas primero, no es necesario estudiar horizontales.

b) Como $1 + x + x^2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- **(Verticales)** El único candidato a considerar es $x = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{x}} \\
&= \frac{0+1}{\sqrt{0+0+1}+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Luego, f no posee asíntotas verticales.

- **(Horizontales)** Estudiamos a f en $+\infty$ y $-\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1} - \frac{1}{x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Luego, las rectas $y = 1$, $y = -1$ son asíntotas horizontales de f

- **(Oblicuas)** Como hay horizontales en ambas direcciones, no es necesario ver oblicuas.

c) Como $1 + e^x > 0$, el dominio es $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

- **(Verticales)** El único candidato es $x = 3$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{1+e^x} \cdot \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} \\
&= \frac{9}{1+e^3} \cdot \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} \qquad C.V: u = x - 3 \\
&= \frac{9}{1+e^3} \cdot +\infty \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Luego, la única asíntota vertical es la recta $x = 3$

- **(Horizontales)** Estudiamos f en $+\infty$ y $-\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+e^x} \cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-3} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1} \cdot \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} \\
&= \frac{0}{0+1} \cdot \frac{1}{1-0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} f(x) &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to -\infty} x \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1+e^x} \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x-3} \\
&= \lim_{x\to -\infty} x \cdot \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to -\infty} e^x} \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} \\
&= (-\infty) \cdot \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1}{1-0} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Luego, concluimos que f tiene asíntota horizontal $y = 0$ hacia $+\infty$, y no posee asíntota horizontal hacia $-\infty$.

d) **(Oblicuas)** Por lo anterior, solo faltaría revisar si hay una asíntota oblicua en $-\infty$

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-3} \\
&= \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to-\infty} e^x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} \\
&= \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1}{1-0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{(1+e^x)(x-3)} - x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x(1+e^x)(x-3)}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x + 3xe^x - x^2e^x}{(1+e^x)(x-3)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-3} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{3+3e^x - xe^x}{1+e^x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-\frac{3}{x}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{3(1+e^x)}{1+e^x} - \frac{xe^x}{1+e^x} \\
&= \frac{1}{1-0} \cdot \lim_{x\to-\infty} 3 - \frac{xe^x}{1+e^x} \\
&= 3 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+e^x} \cdot \lim_{x\to-\infty} xe^x \\
&= 3 - \frac{1}{1+\lim\limits_{x\to-\infty} e^x} \cdot \lim_{x\to-\infty} xe^x \\
&= 3 - \frac{1}{1+0} \cdot \lim_{u\to+\infty} (-u)e^{-u} \qquad C.V: u = -x \\
&= 3 + \lim_{u\to+\infty} \frac{u}{e^u} \\
&= 3 + 0 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que la recta $y = x + 3$ es asíntota oblicua de f en $-\infty$

P2 Calcule por definición la derivada de:

a) $\sinh(x)$ *b*) $x\ln(x)$

Sol. *a*)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sinh(x+h)-\sinh(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{e^{x+h}-e^{-(x+h)}}{2}-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x}e^{h}-e^{-x}e^{-h}-e^{x}+e^{-x}}{2h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x}(e^{h}-1)-e^{-x}(e^{-h}-1)}{2h}\\
&= \frac{e^{x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}-\frac{e^{-x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{h}\\
&= \frac{e^{x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}-\frac{e^{-x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-e^{h}}{he^{h}}\\
&= \frac{e^{x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}+\frac{e^{-x}}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^{h}-1}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^{h}}\\
&= \frac{e^{x}}{2}\cdot 1+\frac{e^{-x}}{2}\cdot 1\cdot 1\\
&= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\\
&= \cosh(x)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x\ln(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\ln(x+h)-x\ln(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x(\ln(x+h)-\ln(x))+h\ln(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x\ln\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{h\ln(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h/x)}{h/x}+\lim_{h\to 0}\ln(x+h)\\
&= \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}+\ln(x) \qquad C.V: u=h/x\\
&= 1+\ln(x)
\end{aligned}$$

P3 Calcule la derivada de:

a) $\tan^2(x) + \tan(x^2)$

b) $x^{\arctan(x)}$

Sol.

a)

$$\begin{aligned}(\tan^2(x) + \tan(x^2))' =& (\tan^2(x))' + (\tan(x^2))' \qquad \text{(Álg. de derivadas)}\\ =& 2\tan(x)\cdot(\tan(x))' + \sec^2(x^2)\cdot(x^2)' \qquad \text{(RdC)}\\ =& 2\tan(x)\cdot\sec^2(x) + \sec^2(x^2)\cdot 2x\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\cosh(\sqrt{x})}\right)' =& \frac{(x)'\cdot\cosh(\sqrt{x}) - x\cdot(\cosh(\sqrt{x}))'}{(\cosh(\sqrt{x}))^2} \qquad \text{(Álg. de derivadas)}\\ =& \frac{1\cdot\cosh(\sqrt{x}) - x\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x})'}{\cosh^2(\sqrt{x})} \qquad \text{(RdC)}\\ =& \frac{\cosh(\sqrt{x}) - x\cdot\operatorname{senh}(\sqrt{x})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\cosh^2(\sqrt{x})}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(x^{\arctan(x)})' =& (e^{\arctan(x)\ln(x)})' \qquad \text{(Def. de potencia)}\\ =& e^{\arctan(x)\ln(x)}\cdot(\arctan(x)\ln(x))' \qquad \text{(RdC)}\\ =& x^{\arctan(x)}\cdot((\arctan(x))'\ln(x) + \arctan(x)(\ln(x))') \qquad \text{(Álg. de derivadas)}\\ =& x^{\arctan(x)}\cdot\left(\frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

P4 Usando la fórmula para la derivada de la función inversa, calcule la derivada de:

a) $\sqrt[3]{x}$

b) $\ln(x)$

Sol.

a) $\sqrt{x}$ es la inversa de la función $f(x) = x^2$, luego:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{f'(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $\ln(x)$ es la inversa de la función $g(x) = \exp(x)$, luego:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{g'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

P5 Encuentre la recta tangente a la curva de ecuación

$$\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)=\operatorname{sen}(xy)$$

en el punto P donde la curva intersecta al eje OX, con abscisa positiva ($x>0$)

Sol. Como P corresponde a la intersección de la curva con el eje OX, se tiene que P tiene ordenada $y_P=0$, para determinar su abscisa x_P, usamos que P es un punto de la curva, y con ello satisface su ecuación, es decir:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{3}{4}+x_P^2+y_P\right)&=\operatorname{sen}(x_P\cdot y_P)\\ \iff \ln\left(\frac{3}{4}+x_P^2\right)&=0\\ \iff \frac{3}{4}+x_P^2&=1\\ \iff x_P^2&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Como el enunciado nos dice que la abscisa de P es positiva, concluimos que $P=(\frac{1}{2},0)$.

Para determinar la recta $y=mx+n$ que es tangente a la curva y pasa por P, suponemos que en torno a P, la curva viene dada por la relación implícita $(x,y(x))$, y con ello, la definición de derivada nos dice que $m=y'(\frac{1}{2})$. Para obtener y', derivamos la relación implicita que define a la curva, obteniendo que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)&=\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(xy)\\ \iff \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{4}+x^2+y\right)&=\cos(xy)\cdot\frac{d}{dx}(xy)\\ \iff \frac{1}{\frac{3}{4}+x^2+y}\cdot(2x+y')&=\cos(xy)\cdot(y+xy')\end{aligned}$$

Evaluando esta última igualdad en P, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0}\cdot(2\cdot\frac{1}{2}+y'(\frac{1}{2}))&=\cos(\frac{1}{2}\cdot 0)\cdot(0+\frac{1}{2}\cdot y'(\frac{1}{2}))\\ \iff 1+y'(\frac{1}{2})&=\frac{1}{2}\cdot y'(\frac{1}{2})\end{aligned}$$

De esta igualdad, se obtiene que $y'(\frac{1}{2})=-2$. Para obtener el coeficiente de posición, basta notar que el punto P pertenece a la recta, y con ello satisface la ecuación $y=-2x+n$, obteniendo que $0=-2\cdot\frac{1}{2}+n$, lo que nos permite concluir que $n=1$, y por lo tanto la recta buscada es $y=-2x+1$

P8 y P9 de regalo de navidad

P8 [Propuesto] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} mx + n & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de $m, n \in \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable, y determine f'

Sol. Vemos que f es diferenciable en $(-\infty, 0)$ al ser una función lineal. Por otro lado, se tiene que f es diferenciable en $(0, +\infty)$ por álgebra de derivadas, pues $\sin(x)$ es diferenciable. En consecuencia, solo debemos revisar la derivabilidad en $x = 0$, recordemos que:

$$f \text{ es derivable en } x = 0 \text{ si } \exists f'(0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \iff \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Calculemos ambos límites laterales:

- Por la derecha:
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1 + \sin(h) - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$
- Por la izquierda:
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{mh + n - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} m + \frac{n-1}{h} = m + \lim_{h\to 0^+} \frac{n-1}{h}$$
Aquí notamos que $\lim_{h\to 0^+} \frac{n-1}{h} = \infty$ si $n-1 \neq 0$, como buscamos que el límite exista, obtenemos que $n = 1$. De esta forma, se tiene que:
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = m$$

Con ello, deducimos que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \iff m = 1 \land n = 1$$

En conclusión, se tiene que f es diferenciable si y solo si, $m = n = 1$, y en tal caso $f'(0) = 1$. De esta forma, obtenemos que la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pues $(mx + n)' = m = 1$ para $x < 0$, y $(1 + \sin(x))' = \cos(x)$ para $x > 0$.

P9 [Propuesto] Usando la derivada de la inversa, calcule la derivada de $f(x) = \operatorname{arcsinh}(x)$

Sol. $\operatorname{arcsinh}(x)$ es la inversa de la función $h(x) = \sinh(x)$, luego:

$$(\operatorname{arcsinh}(x))' = \frac{1}{h'(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}(\operatorname{arcsinh}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Donde usamos que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ y $\cosh(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$