

Semana 1: Sesión RP N° 1

Continuidad y propiedades de funciones

Profesor: Patricio Felmer
Auxiliares: Iñaki Escobar, Nicolás Fuenzalida

P1.- Continuidad en el cero: ¿Cuál sobrevive?

¿Cuál de las siguientes funciones son continuas en 0?

1.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

P2.- El positivo perseverante

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde I es un intervalo. Sea a un elemento interior de I tal que $f(a) > 0$. Muestre que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

P3.- Punto de transición

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$ en $(-\infty, c)$ y $f(x) > 0$ en $(c, +\infty)$. ¿Cuál es el valor de $f(c)$?

P4.- Explorando funciones Lipschitzianas

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice L -Lipschitz con $L \geq 0$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Muestre que toda función Lipschitziana es continua. ¿Puedes dar un ejemplo de una función de tipo Lipschitz?