Resumen Cálculo Diferencial e Integral

Nicolás Fuenzalida Sáez

1 [Semana 1] Subsucesiones y Continuidad

Definición 1 *(Subsucesión). Sea (s_n) una sucesión. Sea $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n genera por ϕ, a la sucesión (u_n), definida por:*

$$u_n = s_{\phi(n)}$$

Teorema 1 *Sea (s_n) una sucesión y sea $l \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$s_n \to l \iff \text{Todas las subsucesiones de } (s_n) \text{ convergen a } l$$

Teorema 2 *(Bolzano-Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

1.1 Funciones continuas

Definición 2 *(Función continua en un punto). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si*

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \bar{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema 3 *(Álgebra de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones resultan ser continuas en $\bar{x}$:*

1. *$f + g$.*
2. *$f - g$.*
3. *λf, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *$f \cdot g$.*
5. *f/g, cuando $g(\bar{x}) \neq 0$.*

Teorema 4 *(Composición de funciones continuas). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $\bar{x} \in A$ y g es continua en $f(\bar{x}) \in B$, entonces la función $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.*

Teorema 5 *(Caracterización ϵ - δ). Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A\{|x - \bar{x}| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \epsilon\}$$

Observación Con esta propiedad, podemos establecer la conexión entre continuidad y límite de funciones, si el dominio de la función permite estudiar el límite de $f(x)$ cuando $x \to \bar{x}$ y $\bar{x} \in A$ se tiene que:

$$f \text{ es continua en } \bar{x} \text{ ssi } \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Definición 3 *(Función continua). Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \bar{x} \in A$, diremos que f es continua.*

Observación Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que existe una constante $L \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ para todo $x, y \in A$ (una función con estas características se le dice Lipschitziana de parámetro L).

2 [Semana 2] Continuidad. Los grandes teoremas

2.1 El teorema de los valores intermedios

Teorema 6 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*

Como corolario inmediato del teorema anterior, se obtiene la Propiedad de Darboux o Teorema de los Valores Intermedios:

Teorema 7 *(TVI). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

2.2 Máximos y mínimos: el teorema de Weierstrass

Teorema 8 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.*

2.3 Continuidad de las funciones inversas

Teorema 9 *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.*

2.4 Continuidad uniforme

Ya vimos la noción de continuidad en términos de sucesiones, y usando la caracterización ϵ - δ. Vale la pena notar que en general δ depende de ϵ y del punto $\bar{x}$, es decir, $\delta = \delta(\epsilon, \bar{x})$. Veamos ahora que para ciertas funciones es posible encontrar $\delta > 0$ que satisface la propiedad ϵ - δ independientemente del punto $\bar{x}$ en consideración:

Definición 4 *La función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Observación Una función uniformemente continua resulta ser continua en todo su dominio, es decir, siempre se tiene que

$$f \text{ es función uniformemente continua } \Longrightarrow f \text{ es función continua.}$$

Veamos condiciones para obtener la recíproca:

Teorema 10 *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces*

f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.

3 [Semana 3] Derivadas

3.1 Funciones derivables

Definición 5 *Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\bar{x} \in (a,b)$, si existe el límite*

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

Dicho límite se denota $f'(\bar{x})$ o bien $\frac{df}{dx}(\bar{x})$ y se llama derivada de f en $\bar{x}$.

Observación De manera equivalente, f es derivable en $\bar{x}$ si existe una pendiente $m = f'(\bar{x})$ tal que la función afín $a(x) = f(\bar{x}) + f'(x)(x-\bar{x})$ es una aproximación de f en el sentido que

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + o(x-\bar{x})$$

con $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$. Usando el cambio de variable $h = x - \bar{x}$, lo anterior puede escribirse equivalentemente

$$f'(\bar{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h}$$

o también

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h).$$

Notemos que si f es derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en dicho punto.

Observación Algunas derivadas conocidas:

$$f(x) = a + bx \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = b,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = x^2 \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = 2\bar{x},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = sen(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cos(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = cos(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -sen(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = exp(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = exp(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = ln(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^+.$$

3.2 Reglas de cálculo de derivadas

Proposición 1 *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces:*

(a) $f+g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f+g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x})$$

(b) fg es derivable en $\bar{x}$ con

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

(c) Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces f/g es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}$$

Observación Más derivadas conocidas:

$$f_n(x) = x^n \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = n\bar{x}^{n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f_n(x) = x^{-n} \text{ tiene derivada } f_n'(\bar{x}) = -n\bar{x}^{-n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \text{ tiene derivada}$$

$$p'(\bar{x}) = a_1 + 2a_2\bar{x} + 3a_3\bar{x}^2 + \ldots + na_n\bar{x}^{n-1},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = tan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = sec^2(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = cotan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = -cosec^2(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f(x) = senh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = cosh(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = cosh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = senh(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = tanh(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{cosh^2(\bar{x})},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = a^x \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = ln(a)a^{\bar{x}},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}, \forall a > 0.$$

Teorema 11 *(Regla de la cadena). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Teorema 12 *(Derivadas de funciones inversas). Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a,b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}.$$

Observación Más derivadas conocidas:

$$f(x) = arcsin(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{1-\bar{x}^2}},\ \forall \bar{x} \in [-1,1].$$

$$f(x) = arctan(x) \text{ tiene derivada } f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+\bar{x}^2},\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

4 [Semana 4] Derivadas: Los teoremas

4.1 Máximos y mínimos: la regla de Fermat

Definición 6 *Diremos que un punto $\bar{x}$ es un mínimo local de la función f si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in (\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon).$$

Definición 7 *Diremos que un punto $\bar{x}$ es un máximo local de la función f si existe $\epsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(\bar{x})\ \forall x \in (\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon).$$

Teorema 13 *Si $\bar{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$.*

4.2 El teorema del valor medio

Teorema 14 *(TVM). Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces existe $\xi \in (a,b)$ tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi).$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4.3 Algunas aplicaciones de la derivada

Una primera consecuencia directa del TVM es la llamada regla de l'Hôpital para el cálculo de límites de la forma $0/0$ o ∞/∞.

Teorema 15 *(Regla de l'Hôpital). Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que este último límite exista.

Observación La regla de l'Hôpital también se aplica para límites con $x \to a^-$, $x \to a$, e incluso para límites con $x \to \infty$ de la misma forma.

4.4 Derivadas y monotonía

Teorema 16 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a,b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

4.5 Derivadas y convexidad

Definición 8 *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir*

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x) \qquad \forall x < z < y$$

o también

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Teorema 17 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces f es convexa en $[a,b]$ ssi f' es creciente en (a,b).*

Observación Análogamente, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice cóncava si las rectas secantes quedan por debajo del gráfico de la función. Esto equivale a la convexidad de $-f$ y por lo tanto, en el caso diferenciable, a que f' sea decreciente.

4.6 Derivadas de orden superior

Observación Las derivadas de orden superior se definen inductivamente por

$$f^{[k]}(\bar{x}) := (f^{[k-1]})'(\bar{x}).$$

con la convención $f^{[0]}(x) = f(x)$. Notar que para que f tenga una derivada de orden k en $\bar{x}$, $f^{[k-1]}(x)$ debe existir al menos en un intervalo $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ y ser derivable en $\bar{x}$. Si f admite una derivada de orden k en todo punto de un intervalo (a,b), entonces $f^{[k-1]}$ (e inductivamente todas las derivadas de orden inferior a k) son continuas en (a,b). Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a,b)$ si es k veces derivable en todo punto del intervalo (a,b), y la función $f^{[k]} : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua. Si esto es cierto para todo k, diremos que f es de clase C^∞.

4.7 Desarrollos limitados

Definición 9 *Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x} \in (a,b)$ si existen constantes $a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}$ tales que*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + ... + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k)$$

con $\lim_{u\to 0} o(u^k)/u^k = 0$.

Teorema 18 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\bar{x} \in (a,b)$, y sea*

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + ... + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + o((x - \bar{x})^k)$$

con $\lim_{h\to 0} o(h^k)/h^k = 0$.

4.8 Caracterización de puntos críticos

Proposición 2 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, k veces derivable en $\bar{x} \in (a,b)$, con $f'(\bar{x}) = ... = f^{[k-1]}(\bar{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

a) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) > 0$, $\bar{x}$ es un mínimo local.

b) Si k es par y $f^{[k]}(\bar{x}) < 0$, $\bar{x}$ es un máximo local.

c) Si k es impar, $\bar{x}$ es un punto de inflexión.

4.9 Fórmula de Taylor

La siguiente generalización del TVM permite calcular el error de aproximación que se comete al reemplazar una función por su desarrollo de Taylor.

Teorema 19 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a,b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (resp. $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1](\xi)}}{(k+1)!}(x - \bar{x})^{k+1}.$$

4.10 El método de Newton

Consideremos la ecuación $f(x) = 0$ donde $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f(a)f(b) < 0$. En el capítulo de continuidad vimos que existe una solución $x^* \in (a,b)$, la cual podemos aproximar mediante el método de bisección. Dicho método, a pesar que nos asegura converger hacia x^*, es relativamente lento.

Usando la noción de derivada podemos construir un método iterativo más eficiente. Supongamos que disponemos de una aproximación de la solución $x_0 \sim x^*$. Si en la ecuación $f(x) = 0$ reemplazamos la función $f(\cdot)$ por su aproximación afín en torno a x_0, obtenemos la ecuación lineal $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$. Si $f'(x_0) \neq 0$, la solución de esta ecuación linealizada es $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, la cual podemos considerar como una nueva aproximación de x^*, que esperamos sea más precisa.

La iteración de este procedimiento a partir de la nueva aproximación conduce a un método iterativo de la forma

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

el cual estará definido mientras se tenga $f'(x_n) \neq 0$. Esta iteración se conoce como el Método de Newton (para ecuaciones).

Teorema 20 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y supongamos que $x^* \in (a,b)$ es una solución de la ecuación $f(x^*) = 0$ tal que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existen constantes $\epsilon > 0$ y $M > 0$ tales que para todo punto de partida $x_0 \in I_\epsilon := (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ el método de Newton está bien definido y converge hacia x^* con*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2.$$

5 Primitivas

Definición 10 *(Primitiva). Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I ssi*

$$\forall x \in Int(I), F'(x) = f(x).$$

Observación Dos primitivas de una función difieren a lo más en una constante. Si F es una primitiva de f, entonces la función $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria, es otra primitiva de f.

Observación El conjunto de todas las primitivas de f se anotará como $\int f$. Si F es una primitiva de f, entonces notaremos:

$$\int f = F + c.$$

Es habitual, usar la notación clásica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

donde dx corresponde a un símbolo que sirve para identificar a la variable.

5.1 Primitivas o integrales indefinidas inmediatas

A continuación se presentan algunas primitivas cuyo cálculo es elemental:

i) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ \forall n \neq -1.$

ii) $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + c = ln(K|x|), \ K > 0.$

iii) $\int sen(x)dx = -cos(x) + c.$

iv) $\int cos(x)dx = sen(x) + c.$

v) $\int e^{ax}dx = \dfrac{1}{a}e^{ax} + c.$

vi) $\int senh(x)dx = cosh(x) + c.$

vii) $\int cosh(x)dx = senh(x) + c.$

viii) $\int sec^2(x)dx = tan(x) + c.$

ix) $\int cosec^2(x)dx = cotan(x) + c.$

x) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctan(x) + c$.

xi) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen(x) + c.$

xii) $\int \dfrac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + c.$

Observación 1. $\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad \int f' = f + c.$

2. $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \quad \left(\int f\right)' = f.$

Proposición 3 *$\int$ es un operador lineal, es decir:*

1. $\int f \pm g = \int f \pm \int g.$
2. $\int \alpha f = \alpha \int f, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

5.2 Teorema de cambio de variable

Teorema 21 *(Cambio de variable). Si $u = g(x)$, entonces*

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx \text{ o, equivalentemente } \int f = \int (f \circ g) \cdot g'.$$

6 Primitivas (2)

6.1 Integración por partes

Proposición 4 *(Fórmula de integración por partes). Sean u y v dos funciones de x, entonces:*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

$$\text{o, equivalentemente} \quad \int u \cdot v' = u \cdot v - \int v \cdot u'$$

Observación Usualmente la fórmula de integración por partes se escribe de manera más compacta como

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

donde $dv = v'(x)dx$ y $du = u'(x)dx$.

6.2 Sustituciones trigonométricas tradicionales

Cuando en una integral figuren expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:

1. Para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o bien $x = asenh(t)$.

2. Para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(v)$ o bien $x = acos(v)$.

3. Para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o bien $x = acosh(t)$.

6.3 Integración de funciones racionales

Se desea integrar funciones $R(x)$ de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0},$$

con $n < m$.

Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:

$$Q(x) = b_m (x-r_1)^{\alpha_1} \cdots (x-r_s)^{\alpha_s} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_t x+c_t)^{\beta_t}$$

En donde $r_1, \ldots, r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, y $\beta_1, \ldots \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles.

Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:

1. Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:

$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + \ldots + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}.$$

2. Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:

$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{x^2 + b_i x + c_i} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + \ldots \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

6.4 Integrales trigonométricas reducibles a integrales de funciones racionales

Consideramos integrales del tipo

$$\int R(sen(x), cos(x)) dx,$$

en donde R es una función racional en la cual aparecen sólo $sen(x)$ y $cos(x)$.

En estos casos se aconseja el cambio de variable:

$$t = tan(x/2),$$

con lo cual

$$dt = \frac{1}{2} sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Pero por otra parte, $arctan(t) = x/2$, de donde

$$\frac{dt}{1 + t^2} = \frac{dx}{2}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \text{y} \quad sen\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Usamos entonces unas conocidas identidades trigonométricas para el seno y el coseno de un ángulo doble, con lo que

$$sen(x) = 2sen\left(\frac{x}{2}\right) cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

En resumen,

$$t = tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad sen(x) = \left(\frac{2t}{1 + t^2}\right), \quad cos(x) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right), \quad dx = \left(\frac{2dt}{1 + t^2}\right).$$

7 Integral de Riemann

7.1 Introducción

La teoría de la integral de Riemann tiene un objetivo simple, que es: formalizar la noción de área mediante una definición que sea compatible con las ideas comunes e intuitivas acerca de este concepto.

Surge entonces la pregunta de ¿cuáles son estas ideas básicas?. Por ejemplo, una de ellas es que el área de una superficie cuadrada de lado a sea a^2. Si esto es verdadero, se debe concluir que la superficie de un rectángulo de lados a y b es $a \cdot b$.

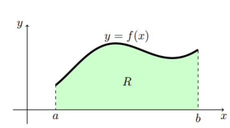
7.2 Condiciones básicas para una definición de área

Sea E un conjunto de puntos en el plano OXY . El área del conjunto E será un número real $A(E)$ que cumple las siguientes condiciones.

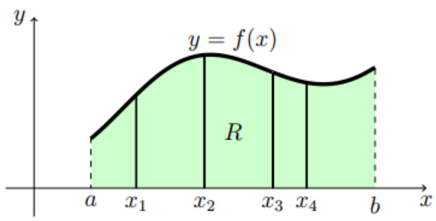
$(A1)$ (Positividad) $A(E) \geq 0$
$(A2)$ (Monotonía) $E \subseteq F \Longrightarrow A(E) \leq A(F)$
$(A3)$ (Aditividad) Si $E \cap F = \emptyset \Longrightarrow A(E \cup F) = A(E) + A(F)$
$(A4)$ (Rectangularidad) El área de una región rectangular E de lados a y b es $A(E) = a \cdot b$

Estas 4 condiciones son necesarias y suficientes para tener una buena definición de área. Se verá más adelante, en el transcurso del curso, que la integral de Riemann las satisface adecuadamente.

Observación Las cuatro propiedades elementales anteriores no son independientes entre sí, ya que por ejemplo $(A2)$ es una consecuencia de $(A1)$ y $(A3)$. Mediante la integral de Riemann se definirá el área de una región E particular: Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ consideremos la región R limitada por el eje OX, la curva de ecuación y = f(x) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. El área de esta región se llamará área bajo la curva $y = f(x)$ entre a y b.



Por el momento, nos concentramos en la propiedad ($A3$), que sugiere dividir la región R en regiones más pequeñas. Por este motivo, el primer elemento que incorpora la definición de integral de Riemann es el concepto de partición, que sirve intuitivamente, para dividir la región R en bandas verticales, como se muestra en la figura:



Definición 11 *(Partición de un intervalo). Una* ***partición*** *de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito de puntos $P = \{x_0, ..., x_n\}$ tales que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Se llama ***norma*** *de la partición P al real $|P| = \text{máx}_{i=1,...,n}(x_i - x_{i-1})$.*

7.3 Integración de funciones escalonadas

Definición 12 *Diremos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es* ***escalonada****, si existe una partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ tal que f es constante en cada intervalo abierto $(x_{i-1}, x_i), \forall i = 1, ..., n$.*

Observación Las funciones escalonadas sólo toman un número finito de valores diferentes, que son: los valores $f(x_i)$ en los $n + 1$ puntos de la partición y los valores constantes c_i que toma en los n intervalos abiertos (x_{i-1}, x_i). Así resulta que toda función escalonada es **acotada**.

Observación Diremos que P es una partición asociada a f. Esta partición P no es única ya que al subdividir los intervalos de P, la función f todavía será constante en las subdivisiones que resulten. Por este motivo, antes de estudiar propiedades de estas funciones, conviene introducir el siguiente concepto:

Definición 13 *Sean P, Q particiones de un mismo intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Diremos que Q es un refinamiento de P, o que Q es más fina que P si se cumple que $P \subseteq Q$.*

Observación Si P y Q son particiones cualesquiera, no siempre una es refinamiento de la otra, ya que el concepto de refinamiento NO está asociado directamente a la cantidad de puntos de una partición. Solo podemos decir que si Q es refinamiento de P, entonces Q tiene una cantidad de puntos mayor o igual que P, pero el recíproco es falso. Sin embargo, dadas dos particiones arbitrarias P y Q, siempre existe un refinamiento común a ellas. En efecto, $P \cup Q$ es una partición (ordenando sus puntos de menor a mayor) que es refinamiento de P y de Q simultáneamente.

Definición 14 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función* ***escalonada****. Si para cada partición $P = \{x_0, ..., x_n\}$ asociada a f se calcula*

$$I(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

donde f_i denota al valor constante de f en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i). Entonces $I(f, P)$ no depende de P, es decir, es una cantidad que depende solamente de f.

Definición 15 *Para cada función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* ***escalonada****, se define su integral de Riemann como*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

donde $P = \{x_0, ..., x_n\}$ designa cualquier partición asociada a f y f_i denota el valor constante de f en el correspondiente intervalo abierto $(x_i - x_{i-1})$.

Observación También se suele usar la notación de Leibniz $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Observación La integral de una función escalonada solo depende de los valores de f en los interiores de los intervalos de la partición y no de los valores de f en los bordes.

7.4 Propiedades de la integral de funciones escalonadas.

Teorema 22 *(Linealidad). Si f, g son dos funciones escalonadas en el mismo intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función escalonada en $[a, b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Teorema 23 *(Aditividad horizontal). Si f es una función escalonada en el intervalo $[a, b]$ (donde $a < b$) y si $c \in (a, b)$ es arbitrario. Entonces, f es una función escalonada en ambos intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ y se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 24 *(Monotonía). La integral de una función escalonada positiva en el intervalo $[a, b]$ es positiva. En consecuencia, si f, g son funciones escalonadas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

7.5 Funciones Riemann integrables.

En esta sección, estudiaremos funciones que se les piden las siguientes condiciones: que se trate de una función bien definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ con $a < b$ y que sea acotada en dicho intervalo.

Teorema 25 *Si f es una función definida y acotada en $[a, b]$ arbitraria, entonces se cumple que:*

1. *Los siguientes conjuntos son no vacíos:*
   ◦ *$\varepsilon_-(f)$ es el conjunto de todas las funciones escalonadas que minoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a, b], e(x) \le f(x)$.*

- $\varepsilon_+(f)$ *es el conjunto de todas las funciones escalonadas que mayoran a f, es decir, aquellas funciones escalonadas e tales que $\forall x \in [a,b], e(x) \geq f(x)$.*

2. *Siempre existen las cantidades*

$$I_-(f) = sup\left\{\int_a^b e : e \in \varepsilon_-\right\}, I_+(f) = inf\left\{\int_a^b e : e \in \varepsilon_+\right\},$$

llamadas integral inferior e integral superior de f en $[a,b]$ respectivamente.

3. *Estas integrales verifican la desigualdad*

$$I_-(f) \leq I_+(f).$$

Cuando se cumple la igualdad, el cálculo resultante es muy útil y por eso se hace la siguiente definición:

Definición 16 *Con las notaciones del teorema anterior, se dice que una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si se cumple la condición*

$$I_-(f) = I_+(f).$$

Dicho número común se llama la integral de f en el intervalo $[a,b]$ y se le denota por

$$\int_a^b f \text{ , o bien, } \int_a^b f(x)dx \text{ (notación de Leibniz).}$$

Teorema 26 *(Condición de Riemann). Una función f definida y acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solamente si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists f_- \in \varepsilon_-, f_+ \in \varepsilon_+, \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \leq \epsilon.$$

8 Funciones Riemann Integrables

En esta sección veremos cómo la condición de Riemann permite demostrar que tanto las funciones monótonas en $[a,b]$ (no necesariamente continuas) y las funciones continuas en $[a,b]$, son ambas clases de funciones Riemann integrables.

Teorema 27 *Toda función monótona en $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$.*

Teorema 28 *Toda función continua en $[a,b]$ es Riemann integrable en $[a,b]$.*

Observación En la demostración de ambos teoremas, se han usado las funciones escalonadas definidas en los intervalos (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_-(x) = m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$f_+(x) = M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

e iguales a $f(x_i)$ en cada punto de la partición. Con ellas se tiene que

$$\int_a^b f_- = \sum_{i=1}^n m_i(f)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f_+ = \sum_{i=1}^n M_i(f)\Delta x_i$$

que suelen llamarse suma inferior y suma superior de f asociadas a P, y se denotan respectivamente $s(f,P)$ y $S(f,P)$. Pues bien, en ambos casos (funciones monótonas y/o continuas) existe $\delta > 0$ de modo que si $|P| \leq \delta$ se obtiene $S(f,P) - s(f,P) \leq \epsilon$. Estas sumas son interesantes, pero no tan fáciles de calcular, debido a las definiciones de m_i y M_i. Por este motivo muchas veces se suele usar la suma obtenida por la integración de una función escalonada intermediaria, la cual se define en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) por:

$$f_*(x) = f(s_i) \text{ si } x \in (x_{i-1}, x_i)$$

donde los reales s_i son arbitrarios del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Claramente en este caso:

$$s(f,P) \leq \int_a^b f_* = \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i \leq S(f,P)$$

La sumatoria intermedia se conoce como suma de Riemann. Como la integral de f también satisface la desigualdad

$$s(f,P) \leq \int_a^b f \leq S(f,P)$$

se concluye que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P \text{ partición de } [a,b], |P| \leq \delta \Longrightarrow |\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i - \int_a^b f| \leq \epsilon$$

Esta propiedad es una de las motivaciones de la notación de Leibniz, entendiendo que la integral es el límite de una sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta x_i.$$

En este límite la variable que tiende a cero es la norma de la partición P ($|P| \to 0$) y se calcula sobre las sumas de Riemann. Esto explica el uso del signo integral (especie de S alargada, como límite del signo sumatoria) y de la notación de Leibniz, donde el término denotado por $f(x)dx$ representaría al sumando $f(s_i)\Delta x_i$ en el proceso de límite.

8.1 Propiedades de la Integral.

Teorema 29 *(Linealidad). Si f, g son dos funciones Riemann integrables en el mismo intervalo $[a,b]$. Entonces, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la función $\alpha f + \beta g$ es una función Riemann integrable en $[a,b]$ y se tiene*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Teorema 30 *(Aditividad horizontal) Si f es una función definida y acotada en $[a,b]$ entonces f es Riemann integrable en $[a,b]$ si y solamente si, para cada $c \in (a,b)$ arbitrario se tiene que f es Riemann* *integrable en ambos intervalos $[a,c]$ y $[c,b]$. En tal caso, se tiene que*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Teorema 31 *(Monotonía). La integral de una función Riemann integrable positiva en el intervalo $[a,b]$ es positiva; en consecuencia, si f,g son funciones Riemann integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se tiene que*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Teorema 32 *(Desigualdad triangular). Si f es una función Riemann integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es Riemann integrable en $[a,b]$ y se tiene que*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

En consecuencia, si $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, se cumple

$$\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a).$$

8.2 Integral de a a b con $a \geq b$.

Definición 17 *Sea f una función integrable en un intervalo $[p,q]$. Si $a,b \in [p,q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \text{ si } a > b, \text{ o}$$

$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b.$$

Proposición 5 *Sean f y g integrales en $[p,q]$, y sean $a,b \in [p,q]$ entonces:*

1) $\int_a^b \alpha = \alpha(b-a), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

2) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \forall c \in [p,q].$

3) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

4) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

5) $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [p,q] \Longrightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b g\right|.$

6) $\left|\int_a^b f\right| \leq \left|\int_a^b |f|\right|.$

9 Teorema Fundamental de Cálculo

9.1 Teorema Fundamental del Cálculo

Proposición 6 *Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

Teorema 33 *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo). Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:*

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en int(I) y además $G' = f$ en int(I).

Observación Notemos que la expresión $G'(x) = f(x), \forall x \in int(I)$ más la continuidad de G en I nos indican que $G(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de la función f en I. Es decir, el primer teorema fundamental del cálculo nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas.

Corolario 1 *Si la función F, continua en I, es una primitiva de f en I, entonces:*

$$\forall a,b \in I, \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Observación La expresión $F(b) - F(a)$ se suele abreviar como

$$F(x)\Big|_a^b \equiv F(b) - F(a).$$

Teorema 34 *(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo). Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Observación El Segundo Teorema fundamental del Cálculo es idéntico en contenido al corolario del Primer T.F.C., solo la hipótesis es más amplia, ya que solo pide que f sea integrable y no necesariamente continua.

Fórmula de Integración por Partes

Recordamos que si f y g son dos funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en (a,b) se tiene que:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Si además alguna de las funciones $f'g$ o fg' fuera integrable, la otra también lo sería y se tendría que

$$\int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

es decir,

$$fg\Big|_a^b = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'.$$

Teorema 35 *Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo I y diferenciables en int(I). Sean $a, b \in int(I)$. Si f' y g' son continuas entonces*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g$$

Integración por Sustitución o Cambio de Variable

Teorema 36 *Sea g una función continua en un intervalo I y derivable en $int(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in int(I)$, con $a < b$. Sea f una función continua en $g([a,b])$, entonces:*

$$\int_a^b (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

9.2 Teoremas del Valor Medio y Taylor para integrales.

Definición 18 *(Valor Medio de una función). Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Se llama valor medio de f en $[a,b]$ al número real:*

$$\frac{1}{b-1}\int_a^b f.$$

A este real se le anota $\bar{f}$ o bien $\langle f \rangle$.

Teorema 37 *(Valor Medio para integrales). Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Teorema 38 *(Valor Medio generalizado para integrales). Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g.$$

Teorema de Taylor con Resto Integral

Sea I un intervalo abierto que contenga al intervalo cerrado de extremos x_0 y x. Consideremos una función f de clase $C^{(n+1)}(I)$, entonces claramente

$$\int_{x_0}^x f'(t)dt = f(x) - f(x_0),$$

es decir,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t)dt.$$

Usando integración por partes repetidas veces, se obtiene la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

El término:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

se denomina resto integral del desarrollo de Taylor.

Observación Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizado para integrales se tiene que:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.