MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 5: Suma de espacios

2 de octubre de 2023

P1. Más polinomios Sea el siguiente espacio vectorial:

$$U = \left\{ p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; p(1) = p'(1) = 0 \right\}$$

a) Encuentre una base de U y su dimensión.

b) Extienda la base encontrada a una de todo el espacio $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

c) Ahora considere, además:
$$W = \left\{ p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; p''(0) = 0 \right\}$$
Encuentre una base de W y su dimensión.

d) Caracterice el ev $U \cap W$, encuentre una base del mismo y su dimensión.

e) Muestre que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$.

f) Muestre que todo polinomio tiene dos escrituras de la forma $p = p_1 + p_2$ con $p_1 \in U, p_2 \in W$

g) Concluya que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ no es suma directa de U, W

P2. Nos encantan los polinomios Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ de los polinomios reales de grado menor o igual a m. Si cada $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ se escribe $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$, se define el conjunto $V = \{p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in 0, \ldots, m \quad a_i = a_{m-i}\}$

a) Probar que V es subespacio vectorial de $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ sobre los reales.

b) Encontrar una base de V y deducir que su dimensión es $n + 1$.

c) Probar que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = V \bigoplus \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

d) Se define $V^{'} = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \ldots, m\}, a_i = -a_{m-i} \right\}$. Probar que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = V \bigoplus V^{'}$.

P3. EV's + TL's = F Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se define:

$$A(V) = \{Ax \mid x \in V\}.$$

a) Pruebe que $A(V)$ es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

b) Sean V, W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \bigoplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si A es invertible si y sólo si $A(V) \bigoplus A(W) = \mathbb{R}^n$.