Pauta #9 Lineal.

P1

A tiene 0 como valor propio $\Leftrightarrow$

$\exists \vec{v} \neq \vec{0}$ tq $Av = 0 \cdot v = 0$ $\Leftrightarrow$ el sistema $Ax = 0$ tiene sol. no trivial

$\Leftrightarrow$ A es no invertible.

P2

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Veamos $\det(B - \lambda I)$:

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = (b-\lambda) \cdot [(1+\lambda)(\lambda-2) + 2]$

$= (b-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2 + 2) = (b-\lambda)(\lambda-1) \cdot \lambda$

$\Rightarrow$ Los vp's son $b, 0, 1$

b) $b \geq 9$ es la única condición que necesitamos

P3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Primero, calculamos valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (3-\lambda)[(\lambda-3)(\lambda-4) - 1] - 2(2(4-\lambda) - 1)$

$+ 1(2 + \lambda - 3) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 2(7 - 2\lambda)$

$+ \lambda - 1 = (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 14 + 4\lambda + \lambda - 1$

$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) + (5\lambda - 15)$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 11) - 5(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)[\lambda^2 - 7\lambda + 6] = (3-\lambda)(\lambda-6)(\lambda-1)$$

$\Rightarrow \lambda \in \{1, 3, 6\}$ son los vp's de A.

Veamos los vectores propios. Para ello debemos resolver la ec.

$$(A-\lambda I)\cdot X = 0$$

Para cada λ valor propio de A.

$\lambda = 1$: $A - 1\cdot I = \begin{pmatrix} 3-1 & 2 & 1 \\ 2 & 3-1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sistema homogéneo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$\frac{5}{2} x_2 = 0 \longrightarrow x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -x_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ solución (es base del espacio solución)

$\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} 3-3 & 2 & 1 \\ 2 & 3-3 & 1 \\ 1 & 1 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sist. homogéneo: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{array}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es base del espacio solución.

$\lambda = 6$: $A - 6I = \begin{pmatrix} 3-6 & 2 & 1 \\ 2 & 3-6 & 1 \\ 1 & 1 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Resolvemos el sist. homogéneo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \to x_1 = x_2$
$-5x_2 + 5x_3 = 0 \to x_2 = x_3$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Es base del espacio solución.

b) Tenemos: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Veamos si son ortogonales: esto es $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$.

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + 1 - 2 = 0$.

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 1 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ el conjunto es ortogonal.

Ahora debemos normalizar (dividir cada elemento por su norma)

$$\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ El conjunto obtenido es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

Propuesto: Chequear que estos vectores son vectores propios para $\lambda = 1$, $\lambda = 3$, y $\lambda = 6$ en ese orden.

c) Queremos encontrar la descomposición $A = PDP^{-1}$

Donde: • D es diagonal y tiene los vp's de A
• P es una matriz que tiene $\vec{vp}$'s de A como columnas, en el mismo orden que están sus vp's asociados en D.

Esto es:
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Nos falta calcular P^{-1}. Propuesto.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Con lo que obtenemos la descomposición pedida.